УДК 517.518 На правах рукописи

Сихов Мирбулат Бахытжанович

О некоторых задачах многомерной теории приближений разных метрик

01.01.01 - вещественный, комплексный и функциональный анализ

Автореферат

диссертации на соискание ученой степени
доктора физико–математических наук

Казань - 2010

Работа выполнена в Казахском национальном университете имени аль-Фараби

Научный консультант: доктор физико-математических наук, профессор
Темиргалиев Нурлан

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук, профессор
Иванов Валерий Иванович

доктор физико-математических наук, профессор
Кротов Вениамин Григорьевич

доктор физико-математических наук, профессор
Габбасов Назым Салихович

Ведущая организация: ГОУ ВПО Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова

Защита состоится 16 декабря 2010 г. в 14 часов 00 минут на заседании диссертационного совета Д 212.081.10 при ФГАОУВПО Казанский (Приволжский) федеральный университет по адресу: 420008, г. Казань, ул.Профессора Нужина, 1/37, НИИММ, ауд. 324.

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке им. Н.И.Лобачевского ФГАОУВПО Казанский (Приволжский) федеральный университет по адресу: 420008, г. Казань, ул. Кремлевская, 18.

Автореферат разослан ′ ′ 2010 г. и размещен на официальном сайте ФГАОУВПО Казанский (Приволжский) федеральный университет : www.kpfu.ru/uni/sank

Ученый секретарь совета Д 212.081.10
к.ф.-м.н., доцент Липачёв Е.К.

Общая характеристика работы

Актуальность темы исследования. Классы функций определяются различными характеристиками свойств функций (наличием производных, регулярностью в том или ином смысле тех или иных модулей гладкости, наилучших приближений и т.п.), а также характеристиками наилучших приближений функций в зависимости от выбора приближающего агрегата.

Общеизвестно, что исследование задач, связанных с приближением функций s ($s \geq 2$) переменных, исследовано не в таком объеме и не в такой глубине как в одномерном случае. В первую очередь этот факт имеет место для задач экстремального характера, таких, как нахождение точных оценок приближения на классах функций, отыскание точных значений поперечников и квазипоперечников в банаховых пространствах, нахождение оптимальных многомерных квадратур и т.д. Поэтому в многомерном случае возникло много новых трудных задач в зависимости от выбора приближающего агрегата и разностных характеристик изменения функции.

В теории приближений неравенства Бернштейна (нормы полинома и его производной измеряются в метрике лебеговых пространств) играют важную роль при доказательстве обратных теорем, при получении оценок поперечников классов дифференцируемых функций.

Неравенства Джексона-Никольского, связывающие нормы полинома в различных метриках, важны во многих вопросах теории приближений и вложений. В частности, они применяются для получения теорем вложения в стиле Конюшкова - Стечкина и Ульянова.

Многие вопросы теории гармонического анализа и теории приближений функций многих переменных тесно связаны с оценками норм в различных метриках ядер, подобных ядрам Дирихле.

Вопрос об актуальности исследуемых в диссертации тем более подробно изложим на примере одного нашего результата из 1-го раздела, относящегося к основным (из которого также будет вытекать естественность других задач, изучаемых в этой диссертации).

Классические неравенства Джексона и Бернштейна для $1 \leq p < \infty$ и $f \in L^p(0, 2\pi)$

$$E_n(f)_p << \omega(f; \frac{1}{n})_p$$

и

$$\omega(f; \frac{1}{n})_p << \frac{1}{n} \sum_{m=0}^{n} E_m(f)_p$$

соответственно на случай разных метрик в определенном смысле неулучшаемым образом были перенесены М.А.Жайнибековой (как комбинация неравенств П.Л.Ульянова и Д.Джексона) и автором:

если $1 \leq p < q < \infty$ и $f \in L^p(0, 2\pi)$, то

$$E_n(f)_q << \left[\sum_{m=n+1}^{\infty} m^{\frac{q}{p}-2} \omega^q(f; \frac{1}{m})_p \right]^{\frac{1}{q}} \quad (n = 1, 2, ...), \tag{1}$$

и $(k = 1, 2, ...)$

$$\omega_k(f; \frac{1}{n})_q << \frac{1}{n^k} \left[\sum_{m=0}^{n} (m+1)^{\left(qk+\frac{q}{p}-2\right)} E_m^q(f)_p \right]^{\frac{1}{q}} +$$

$$+\left[\sum_{m=n+1}^{\infty} m^{\left(\frac{q}{p}-2\right)} E_m^q(f)_p\right]^{\frac{1}{q}} \quad (n=1,2,...). \tag{2}$$

(обозначения и исторические сведения с дальнейшими ссылками на литературу приведены здесь ниже и в самой диссертации).

В многомерном тригонометрическом случае в качестве одного из возможных неулучшаемых аналогов неравенства (1) выступает следующая двусторонняя оценка

$$\sup_{f\in SH_p^{\Omega}} E_{Q(\Lambda,N)}(f)_q \asymp \left[\sum_{n\in\Gamma^{\perp}(\Lambda,N)} 2^{\|n\|_1\left(\frac{q}{p}-1\right)}\Omega^q(2^{-n})\right]^{\frac{1}{q}} \quad (N=1,2,...). \tag{3}$$

Обсудим данное соотношение.Пусть дано нормированное пространство Y числовых функций, определенных на измеримом множестве $I_s \subset R^s$ и пусть $F \subset Y$. Для n-мерного подпространства M_n пространства Y, последовательно положим

$$E(f;M_n)_Y = \inf_{g\in M_n} \|f-g\|_Y,$$

$$E(F;M_n)_Y = \sup_{f\in F} E(f;M_n)_Y, \tag{4}$$

$$d_n(F;D_n)_Y = \inf_{M_n\in D_n} E(F;M_n)_Y, \tag{5}$$

где $\{M_n\}$ есть множество всех возможных n-мерных подпространств Y, а $D_n \subset \{M_n\}$. В случае $D_n = \{M_n\}$ - величина (5) есть поперечник по Колмогорову, если же множество D_n составлено из подпространств, натянутых на всевозможные n тригонометрических функций $e^{2\pi(m^{(1)},x)}$, ..., $e^{2\pi(m^{(n)},x)}$ - тригонометрический поперечник.

Изучению различных видов поперечников посвящена обширная литература. Вместе с тем, изучение величин вида (4), как это, в частности, следует из (3), является самостоятельной задачей, отвечающей на ряд содержательных вопросов, и потому естественной и перспективной задачей.

Действительно, в двусторонней оценке (3) содержится большая информация.

Во-первых, здесь содержится точная количественная информация об аппроксимативных возможностях полиномов с достаточно произвольным Λ- спектром относительно функций данного класса.

Именно,каждая функция Λ определяет класс конечных подмножеств Z^s: расширяющийся до Z^s последовательность спектров, конкретизация которых в виде $Q(\Lambda, N)$ осуществляется посредством параметра N. Тогда для данного класса $F = SH_p^{\Omega}$ - обобщенного класса Никольского с ограниченной смешанной разностью в (4)получен точный порядок наихудшей (и тогда остальные не хуже)из наилучших приближений функций этого класса тригонометрическими полиномами со спектром из $Q(\Lambda, N)$ в метрике L^q,тем самым, определены аппроксимативные возможности агрегатов приближения данного типа в данной метрике данного класса функций.

Также отметим, что соотношение (3) имеет один и тот же вид для всех размерностей s, влияние которых проявляется опосредованно через кратность ряда и количество переменных в определяющих спектр и класс функциях Λ и Ω.

Во-вторых, она позволяет при заданном числе точек спектра вычислить геометрию Λ- спектра с наилучшими аппроксимативными возможностями и, одновременно, вычислить точный порядок оптимальной Λ-аппроксимации. Для этого достаточно по заданной функции Ω выделить спектр "больших слагаемых"ряда в правой части (3):

$$E_\varepsilon=\left\{n\in Z_+^s:2^{\|n\|_1\left(\frac{q}{p}-1\right)}\Omega^q(2^{-n})\geq\varepsilon>0\right\}, \tag{6}$$

поскольку если из данной суммы неотрицательных чисел нужно удалить заданное число слагаемых таким образом, чтобы оставшаяся часть имела наименьшее значение, то, разумеется, надо убрать самые большие по значению.

Для иллюстрации остановимся на конкретизации (3) в модельном случае:

$$\Omega_1(t_1,t_2,...,t_s)=\prod_{j=1}^{s}t_j^r\ \ (r>0),\quad N=2^k\ (k=1,2,...). \tag{7}$$

Тогда, согласно (6), имеем $\varepsilon=2^{-k},\ k=1,2,..$

$$E_\varepsilon=A_k=\left\{n\in Z_+^s:2^{\|n\|_1\left(\frac{q}{p}-1\right)}2^{-qr\|n\|_1}\geq2^{-k}>0\right\}=$$
$$=\left\{n\in Z_+^s:\|n\|_1\left(rq-\tfrac{q}{p}+1\right)\leq k\right\}.$$

Для обеспечения теоретико-множественного равенства $A_k=\Gamma(\Lambda,2^k)$, желательно, чтобы Λ- спектр был достаточно широким. Легко видеть, что это равенство выполнено в случае

$$\Lambda_1(t_1,t_2,...,t_s)=\prod_{j=1}^{s}t_j^\beta,\quad\beta=rq-\frac{q}{p}+1>0,$$

при этом соответствующий экстремальный спектр есть

$$Q(\Lambda_1,2^k)=\left\{m\in Z^s:2^{n_j-1}\leq|m_j|<2^{n_j}\ \ (j=1,...,s),\ \|n\|_1\leq\frac{k}{\beta}\ (n\in Z_+^s)\right\}-$$

ступенчатый гиперболический крест с числом точек M, $M\asymp2^{\frac{k}{\beta}}k^{(s-1)}$.

Возникающая при этом погрешность имеет порядок

$$\gamma_M\equiv E(SH_p^r;Q(\Lambda_1,2^k))_{L^q(\pi s)}\asymp\left[\sum_{\|n\|_1>\frac{k}{\beta}}2^{-\|n\|_1\beta}\right]^{\frac{1}{q}}\asymp$$
$$\asymp\left[\sum_{l\in Z:l>\frac{k}{\beta}}2^{-l\beta}\sum_{n:\|n\|_1=l}1\right]^{\frac{1}{q}}\asymp2^{-\frac{k}{q}}k^{\frac{s-1}{q}},$$

в пересчете на число гармоник

$$\gamma_M\asymp\frac{1}{\left(2^{\frac{k}{\beta}}k^{(s-1)}\right)^{\frac{\beta}{q}}}k^{\frac{(s-1)(\beta+1)}{q}}\asymp(MlnM)^{-(r-\frac{1}{p}+\frac{1}{q})}(lnM)^{\frac{1}{q}},$$

что в свою очередь соответствует порядку ортопоперечника, вычисленного В.Н.Темляковым.

Таким образом, в соответствующих известных случаях оптимальные порядки Λ-аппроксимации совпадают с известными результатами о тригонометрических и иных поперечниках, имеющих длительную историю развития.

В-третьих, получен ответ на вопрос *"Как хорошо частичные суммы тригонометрического ряда Фурье с наперед заданным Λ- спектром приближают функцию $f\in SH_p^\Omega$ по сравнению с максимально возможным?"*.

В-четвертых, соотношение (3) представляет собой неулучшаемую прямую теорему теории приближений разных метрик.

И, наконец, **в - пятых**, соотношение (3) в качестве многомерного случая с точными порядковыми соотношениями естественным образом вписывается в общую задачу (4), также имеющую респектабельную историю возникновения и развития. Впервые в 1937 г. в одномерном случае Фавар и Ахиезер-Крейн получают точные равенства

$$\sup_{f\in W^r_\infty(0,1)} E_n(f)_C = \sup_{f\in W^r_\infty(0,1)} \inf_{a_j,b_j} \left\| f(x) - \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k coskx + b_k sinkx \right) \right\|_{C[0,2\pi]} =$$

$$= \frac{1}{\pi^r}\frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k(r-1)}}{(2k+1)^{r+1}}, \qquad (8)$$

а С.М.Никольский в 1946 г. - асимптотическое равенство

$$\sup_{f:|f(x)-f(y)|\le|x-y|,-1\le x,y\le 1} E^1_n(f)_C = \frac{\pi}{2n} + O\left(\frac{1}{nlogn}\right), \qquad (9)$$

где $E^1_n(f)_C$ есть наилучшее приближение функции f(не обязательно периодической) при помощи алгебраических многочленов степени $n-1$ на отрезке $[-1,1]$.

В дальнейшем, точные одномерные результаты по задаче (4) получены другими математиками, главным образом в научной школе Н.П.Корнейчука (см.[Н.П.Корнейчук. Точные константы в теории приближений. М.:Наука,1987] и имеющуюся в ней библиографию). Как правило, точные и асимптотические равенства типа (8) и (9) получают в одномерном случае, а в многомерном, за редким исключением типа гильбертовых пространств - порядковые. Соотношение (3) относится к последнему.

Тем самым, задача (4) имеет самостоятельное значение и свою историю, не всегда сводящуюся к задаче (5). Более того, поперечники по Колмогорову не всегда совпадают с тригонометрическими и тому подобными поперечниками (например, это следует из результатов Б.С.Кашина по вычислению поперечников одномерных классов Соболева).

В цели настоящей диссертации не входит исследование поперечников (5), вместе с тем не исключено, что во всех случаях функций Ω, а не только в степенном случае (7)), выбор (6) "больших слагаемых"в (3) дает значение соответствующего тригонометрического поперечника и искомого экстремального спектра.

В свете вышеизложенного представляется целесообразным изучение в случае Λ-спектра и Ω- гладкости задач, ставших классическими в теории приближений и вложений: неравенств Джексона-Никольского и Бернштейна, оценок ядер Дирихле, самих вложений - 2-я Глава и, как пример применения, получены новые оценки в теории численного интегрирования, составляющего содержание Главы 3.

Научные результаты. В диссертационной работе получены следующие новые результаты:

- получены неулучшаемые прямые и обратные теоремы теории приближений в случае разных метрик, в условиях задания спектра приближающих тригонометрических полиномов мажорантной функцией;

- найдены точные порядки супремума значений наилучших приближений функций из обобщенных классов Никольского со смешанной разностью, выраженные в виде сумм, связывающих мажорантные функции спектра и класса;

-приведены обратные теоремы теории приближений тригонометрическими полиномами для пространств Лоренца в одномерном случае;

- установлены неравенства Бернштейна и Джексона - Никольского для полиномов со спектром, определяемым мажорантной функцией, при различных конкретизациях которых показана точность полученных оценок;

- для ядер Дирихле с достаточно общим спектром получены неулучшаемые оценки норм и норм их производных (в том или ином смысле);

- найдены необходимые и достаточные условия вложения классов функций, характеризуемых только поведением наилучших приближений;

- доказаны теоремы вложения для обобщенных классов Никольского и Бесова с доминирующей смешанной разностью;

- построены квадратурные формулы для обобщенных классов Никольского и Бесова с доминирующей смешанной разностью, обобщенных классов Соболева с доминирующей смешанной производной с указанием эффективного алгоритма нахождения оптимальных коэффициентов многомерной квадратурной формулы;

- приведен критерий равномерной распределенности сеток Коробова в терминах алгебраического многочлена Бернулли.

Степень обоснованности и достоверности научных результатов. Достоверность и обоснованность результатов диссертации базируются на их строгих математических доказательствах. Используемые в работе новые понятия определены корректно. Все утверждения обоснованы, основные выводы и положения сформулированы в виде теорем.

Научная новизна исследования. Все результаты работы, выносимые на защиту, являются новыми.

Оценка внутреннего единства полученных результатов. Внутреннее единство полученных результатов обусловлено общей постановкой изучаемых в диссертации задач и из-за наличия связей результатов между собой в рамках исследуемой темы.

Практическая и теоретическая значимость исследования. Диссертация представляет систематический научный труд, направленный на решение актуальных задач теории приближений. Полученные в работе результаты имеют как теоретическое, так и прикладное значение. Предлагаемый математический аппарат может быть эффективно использован при решении задач теории приближений, теории вложений и численного интегрирования. Полученные результаты могут применяться в учебном процессе при чтении спецкурсов студентам, магистрантам и аспирантам физико-математических специальностей.

Апробация результатов исследования. Основные результаты диссертации были представлены на следующих семинарах и конференциях:

- на совместном заседании Кафедр математического анализа, теории функций и приближений и отделения математики НИММ им. Н.Г.Чеботарева (Казань, Казанский (Приволжский) федеральный университет, декабрь 2008 года);

- на семинаре "Тригонометрические и ортогональные ряды"под руководством академика РАН П.Л.Ульянова и профессора М.К.Потапова (Москва, МГУ им. М.В.Ломоносова, 2006 год);

- на Выездных семинарах в г. Астане (2004-2008 годы) профессоров МГУ им. М.В.Ломоносова - механико-математического факультета Г.И.Архипова и В.Н.Чубарикова, факультета ВМК член-корр. РАН Д.П.Костомарова, А.С.Ильинского, М.М. Хапаева;

- на семинаре Кафедры математического анализа и Института теоретической математики и научных вычислений под руководством профессора Н.Темиргалиева (Астана, Казахстан, Евразийский национальный университет им. Л.Н.Гумилева, 2004 - 2010 годы);

- на семинаре Кафедры функционального анализа и теории вероятностей под руководством профессоров Н.К.Блиева, К.Ж.Наурызбаева и доцента Н.Е.Аканбай (Алматы, Казахстан, КазНУ имени аль-Фараби, 2004 - 2009 годы);

- на Расширенном заседании лабораторий функционального анализа, теории аппроксимаций, уравнений математической физики (Алматы, Казахстан, Институт математики МОН, май 2007 года);

- на семинаре Лаборатории теории аппроксимаций под руководством профессора А.А. Женсыкбаева (Алматы, Казахстан, Институт математики МОН, январь 2006 года);

- на семинаре "Дифференциальные операторы и их приложения"механико-математического факультета (Алматы, Казахстан, Казахский национальный университет имени аль-Фараби, сентябрь 2004 года);

- на III конгрессе Всемирного математического общества тюркоязычных стран (Казахский национальный университет имени аль-Фараби, Алматы, Казахстан, 30 июня - 4 июля 2009 года);

а также на международных научных конференциях в Казахстане (2000-2009 годы) с участием академика РАН С.М. Никольского, член-корр. РАН О.В. Бесова, член-корр. РАН Б.С.Кашина, Полного профессора университета Южной Каролины В.Н.Темлякова, профессоров В.А. Андриенко (Одесса, Украина), В.Г. Кротова (Минск, Белоруссия), В.И.Иванова (Тула, ТулГУ), М.Л.Гольдмана (Москва, РУДН), Г.А.Калябина (Москва, РУДН), А.А. Кореновского (Одесса, Украина), А.М. Джураева (Ош, Киргизия), J. Schneider (Prague, Czechia).

Публикации. Результаты, основные положения и выводы диссертационного исследования отражены в 46 публикациях в периодических изданиях и тематических сборниках общим объемом 12,34 п.л. В том числе 7 статей опубликованы в журналах, определенных Высшей аттестационной комиссией (ВАК) Министерства образования и науки Российской Федерации для публикации результатов научных исследований.

Вклад автора в разработку избранных проблем. Диссертация является самостоятельным исследованием автора. 39 опубликованных научных работ по теме исследования выполнены без соавторов, 7 работ написаны совместно.

Структура и объем работы. Диссертационная работа состоит из введения (исторический обзор, общая характеристика и содержание диссертации), трех глав, выводов и списка цитируемой литературы. Библиографический список состоит из 202 наименования. Полный объем диссертации составляет 186 машинописного текста.

Нумерация параграфов производится двумя символами. Например, номером 1.2 обозначен второй параграф первой главы.

Нумерация теорем, следствий в тексте диссертации в каждом параграфе своя (например, теорема 1.2.3 соответствует теореме 3 второго параграфа первой главы), а нумерация формул в каждой главе своя.

Краткое содержание диссертации

Пусть $\pi_s = [-\pi, \pi]^s$-s-мерный куб, $L^p(\pi_s)$ $(1 \le p \le \infty)$-множество всех измеримых 2π- периодических по каждой из s переменных функций $f(x) = f(x_1, \dots, x_s)$ таких, что

$$\left\|f\right\|_p = (2\pi)^{-s} \left(\int\limits_{\pi_s} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} < \infty, \quad 1 \le p < \infty,$$

$$\Big\|f\Big\|_p = vrai \sup_{x\in\pi_s} |f(x)| < \infty, \quad p=\infty,$$

пусть также

$$L_0^p(\pi_s) = \left\{ f \in L^p(\pi_s): \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)dx_j = 0 \quad (j=1,...,s\ ) \right\}.$$

Для подмножества B евклидова пространства R^s через B_0 и B_+ обозначим множества, состоящие из всех элементов $x=(x_1,...,x_s)\in B$, каждая компонента которых неотрицательна и положительна соответственно.Через Z^s, как обычно, обозначим целочисленную решетку R^s. Для $n\in Z_+^s$ положим $\Big\|n\Big\|_1 = n_1+\ldots+n_s$, $2^{-n} = (2^{-n_1},\ldots,2^{-n_s})$.

Для $f\in L^p(\pi_s)$ определен смешанный модуль гладкости порядка $k\in Z_+\equiv Z_+^1$

$$\Omega_k(f;t)_p \equiv \Omega_k(f;t_1,...,t_s)_p = \sup_{\substack{|h_j|\le t_j\\ j=1,...,s}} \|\Delta_h^k f(x)\|_p \ \ (t\in[0,1]^s),$$

где $\Delta_h^k f(x) = \Delta_{h_s}^k ... \Delta_{h_1}^k f(x), \quad \Delta_{h_j}^k = \Delta_{h_j}^1(\Delta_{h_j}^{k-1})$,
$\Delta_{h_j}^1 f(x) = f(x_1,...,x_j+h_j,...,x_s) - f(x_1,...,x_j,...,x_s)$.

При $s=1$ также обозначим

$$\omega_k(f;t)_p \equiv \Omega_k(f;t)_p.$$

Для данных чисел $1\le p\le\infty$, $0<r_1\le ...\le r_s$ класс Никольского $SH_p^{r_1,...,r_s}$ состоит, по определению, из всех функций $f\in L^p(\pi_s)$ таких, что для смешанного модуля гладкости порядка $k>r_s$ выполнено

$$\Omega_k(f;t)_p \le \prod_{j=1}^s t_j^{r_j}. \tag{10}$$

Более тонкая классификация функций по гладкости в метрике $L^p(\pi_s)$ состоит в замене в этом определении функций $t_j^{r_j}$ на общие функции типа модуля гладкости.

И, наконец, наиболее естественный общий случай состоит в замене мажорантной функции в правой части (10) на функцию типа смешанного модуля гладкости $\Omega(t) = \Omega(t_1,...,t_s)$ - непрерывной на $[0,1]^s$ функции, являющейся функцией типа модуля гладкости порядка k по каждой из переменных при фиксированных остальных (здесь и в дальнейшем, выражение "при фиксированных остальных переменных"будет означать, что константа в соответствующем определении не зависит от этих переменных);
полученный при этом класс функций $f\in L_o^p(\pi_s)$ обозначим через SH_p^Ω.

Если $f\in L^p(\pi_s)$, то через $E_G\Big(f\Big)_p$ обозначают наилучшее приближение (в L^p) функции f полиномами из $T(G)$, где G - конечное множество точек Z^s, а

$$T(G) = \left\{ t(x): t(x) = \sum_{n\in G} c_n\ e^{\ i\ (n,x)} \right\}.$$

В нашей работе спектр G будет задан посредством непрерывной на $[0,1]^s$ функции $\Lambda(t)=\Lambda(t_1,...,t_s)$, неубывающей по каждой переменной при фиксированных остальных и такой, что $\Lambda(t)>0$ и $\Lambda(t)=0$ смотря по тому $\prod_{j=1}^s t_j>0$ или $\prod_{j=1}^s t_j=0$.

Определим следующие множества ($N > 0$):

$$\Gamma(\Lambda, N) = \left\{n \in Z^s_+ : \Lambda(2^{-n}) \geq \tfrac{1}{N}\right\}, \Gamma^{\perp}(\Lambda, N) = Z^s_+ \setminus \Gamma(\Lambda, N)\ ,$$
$$\rho(n) = \{m = (m_1, ..., m_s) \in Z^s :\ 2^{n_j - 1} \leq |m_j| < 2^{n_j}\}\ \ (n \in Z^s_+),$$
$$Q(\Lambda, N) = \bigcup_{n \in \Gamma(\Lambda, N)} \rho(n).$$

Основными понятиями теории приближений являются понятия наилучшего приближения и модуля непрерывности (гладкости), отражающие соответственно конструктивные и структурные свойства функции.

В одномерном случае взаимоотношения между этими принципиально различными характеристиками функций впервые были установлены Д.Джексоном и С.Н.Бернштейном.

Именно, Д.Джексон доказал, что 2π- периодическую функцию от одной переменной $f(x)$, имеющую непрерывную производную порядка r, можно приблизить тригонометрическими полиномами $t_n(x)$ так, что отклонение $t_n(x)$ от $f(x)$ удовлетворяет неравенству

$$\|f(x) - t_n(x)\|_C \leq C(r)\frac{\omega(f^{(r)}; \frac{1}{n})_C}{n^r}\ \ (n = 1, 2, ...).$$

С.Н.Бернштейном было доказано, что если 2π- периодическая непрерывная функция f такова, что при заданных числах r-целом неотрицательном и α, $0 < \alpha < 1$, для некоторого $C_1 > 0$ и всякого $n \geq n_0 > 0$ существует тригонометрический полином $t_n(x)$ порядка n такой, что

$$\|f(x) - t_n(x)\|_C \leq \frac{C_1}{n^{r+\alpha}},$$

то

$$f(x) = t_{n_0}(x) + \varphi(x),$$

где $\varphi(x)$- непрерывная 2π-периодическая функция, имеющая непрерывную производную $\varphi^{(r)}(x)$,при этом

$$\omega(\varphi^{(r)}; \frac{1}{n})_C \leq \frac{C_2}{n^{\alpha}}.$$

Чтобы получить аналогичный результат в случае $\alpha = 1$, необходимо, как это впервые заметил А.Зигмунд, перейти к модулю непрерывности (гладкости) 2-го порядка.

В дальнейшем, оценки наилучших приближений функции (в некоторой метрике) через ее модуль гладкости (в той или иной метрике)- прямые теоремы теории приближений или теоремы типа Джексона, и оценки модуля гладкости функции (в некоторой метрике) через ее наилучшие приближения (в той или иной метрике) тригонометрическими полиномами - обратные теоремы теории приближений или теоремы типа Бернштейна, были обьектом исследований многих поколений математиков.

Все эти исследования относились к случаю прямых и обратных теорем теории приближений в одной метрике. Известные случаи разных метрик (в определенном смысле) не были окончательными.

Окончательность сформулированных выше в (1) и (2) прямых и обратных теорем теории приближений в рамках подхода П.Л.Ульянова следующим образом выражается в терминах теорем вложений $1 \leq p < q < \infty$:

$$H^{\omega}_p \subset E_q(\lambda) \Longleftrightarrow \left[\sum_{m=n+1}^{\infty} m^{\frac{q}{p}-2}\omega^q(\frac{1}{m})\right]^{\frac{1}{q}} = O(\lambda_n) \tag{11}$$

и

$$
\begin{gathered}
E_p(\lambda) \subset H_q^{\omega_k} \Longleftrightarrow \\
\frac{1}{n^k}\left[\sum_{m=0}^{n}(m+1)^{\left(qk+\frac{q}{p}-2\right)}\lambda_m^q\right]^{\frac{1}{q}} + \\
+\left[\sum_{m=n+1}^{\infty} m^{\left(\frac{q}{p}-2\right)}\lambda_m^q\right]^{\frac{1}{q}} = O\left(\omega_k\left(\frac{1}{n}\right)\right),
\end{gathered} \tag{12}
$$

где

$$
E_p(\lambda) = \{f(x) \in L^p(\pi_1) : E_n(f)_p = O(\lambda_n) \quad (n \to \infty)\},
$$

где $\lambda \equiv \{\lambda_n\}$ положительная, убывающая к нулю последовательность.

Заметим, что полученный П.Л.Ульяновым, Д.Джексоном и М.А.Жайнибековой (см.[Жайнибекова М.А. О соотношениях между модулями непрерывности и наилучшими приближениями в разных метриках и некоторые многомерные теоремы вложения: Автореф. ... канд.физ.-мат.наук: 01.01.01. Алматы: ИММ, 1985. 14 с.]) критерий (11) позже обобщен на случай производных Н.А. Ильясовым [Ильясов Н.А. К прямой теореме теории приближений периодических функций в разных метриках //Труды МИ РАН.- 1997.- Т.219.- С.356-377], аналогичный (12) результат, но в несколько иной постановке независимо от нас получен им же в [Ильясов Н.А. Обратная теорема теории приближений в разных метриках //Матем. заметки.- 1991.- Т.50.- № 6.-С.57-65].

Первая, основная, задача данного исследования состоит в получении неусиляемых прямых и обратных теорем теории приближений в случае функции многих переменных - ей посвящена первая глава диссертации.

Тем самым, речь идет о распространении неравенств (1) и (2) на многомерный случай.

В первой главе диссертации, изучаются приближения периодических функций многих переменных тригонометрическими полиномами. Спектр приближающих полиномов содержится в множествах, порожденных поверхностями уровня функции $\Lambda(t)$. Именно, для $\Omega(t)$ и $\Lambda(t)$, подчиненных некоторым условиям регулярности, при $1 \leq p < q < \infty$ получены оценки наилучших приближений функции (в L^q) через ее смешанный модуль гладкости (в L^p) - прямые теоремы теории приближений или теоремы типа Джексона разных метрик, и оценка смешанного модуля гладкости функции (в L^q) через ее наилучшие приближения (в L^p) тригонометрическими полиномами - обратные теоремы теории приближений или теоремы типа Бернштейна разных метрик.

Приведем основные результаты главы 1, чему предпошлем некоторые необходимые определения.

По С.Н.Бернштейну, функция $\varphi(t)$ называется почти возрастающей (почти убывающей) на $[0,1]$, если существует постоянная $C > 0$ такая, что $\varphi(t_1) \leq C\varphi(t_2) \quad (\varphi(t_1) \geq C\varphi(t_2))$ для всех $0 \leq t_1 < t_2 \leq 1$.

Нам также потребуются некоторые ограничения на мажорантные функции $\Omega(t)$.

Функция одного переменного $\varphi(\tau) \geq 0$ удовлетворяет условию (S^α) $((S_\alpha))$ при $\alpha > 0$, если $\varphi(\tau)/\tau^\alpha$ почти возрастает (почти убывает) на (0,1]. Так же вводится условие (S) на $\varphi(\tau)$ как выполнение условия (S^α) для некоторого $\alpha,\ 0 < \alpha < 1$, и в этом смысле $(S) = \bigcup\limits_{0<\alpha<1}(S^\alpha)$.

Будем говорить, что $\Omega(t) = \Omega(t_1, ..., t_s)$ удовлетворяет условиям (S^α) и (S_α) при $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_s)$, если соответственно при каждом $j = 1, ..., s$ функция $\Omega(t)$ удовлетворяет условиям (S^{α_j}) и (S_{α_j}) по переменной t_j при фиксированных остальных.

Также всюду ниже мы будем пользоваться обозначениями $\ll A$ и $A \asymp B$. При положительных A и B запись $\ll A$ будет означать $B \le C(\alpha, \beta, ...) \cdot A$, где $C(\alpha, \beta, ...)$ некоторые положительные постоянные, зависящие лишь от указанных в скобках параметров, а запись $A \asymp B$ означает $A \ll B \ll A$. Вообще говоря, всюду ниже параметры $\alpha, \beta, ...$ однозначно определяются по смыслу утверждений, поэтому, в целях сокращения записей, их указывать не будем.

Справедливы следующие теоремы.

Теорема 1.3.1. *Пусть* $1 \le p < q < \infty$, $k-$ *целое положительное число и* $\Lambda(t)$-*непрерывная, неубывающая по каждой переменной на* $[0,1]^s$ *функция такая, что* $\Lambda(t) > 0$ *и* $\Lambda(t) = 0$ *смотря по тому* $\prod_{j=1}^{s} t_j > 0$ *или* $\prod_{j=1}^{s} t_j = 0$. *И пусть* $\Omega(t)-$ *функция типа смешанного модуля гладкости порядка* k, *удовлетворяющая условиям* (S^α) *и* (S_β) *при некоторых* $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_s)$, $0 < \alpha_i < 1$ *и* $\beta = (\beta_1, ..., \beta_s)$ $0 < \beta_i < k$ $(i = 1, ..., s)$ *соответственно. Тогда для того, чтобы имело место вложение*

$$SH_p^\Omega \subset L_0^q(\pi_s), \tag{13}$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$\sum_{n \in Z_+^s} 2^{\|n\|_1 \left(\frac{q}{p} - 1\right)} \Omega^q(2^{-n}) < \infty, \tag{14}$$

причем, при выполнении неравенства (13) *справедливо соотношение* $(N > 0$, *константа в* (15) *зависят лишь от* $p, q, \Omega, \Lambda)$

$$\sup_{f \in SH_p^\Omega} E_{Q(\Lambda,N)}(f)_q \asymp \left[\sum_{n \in \Gamma^\perp(\Lambda,N)} 2^{\|n\|_1 \left(\frac{q}{p} - 1\right)} \Omega^q(2^{-n}) \right]^{\frac{1}{q}}. \tag{15}$$

Теорема 1.3.3. *Пусть* $1 < q \le p < \infty$, $p \ge 2$, $k-$ *целое положительное число и* $\Lambda(t)$- *непрерывная, неубывающая по каждой переменной на* $[0,1]^s$ *функция такая, что* $\Lambda(t) > 0$ *и* $\Lambda(t) = 0$ *смотря по тому* $\prod_{j=1}^{s} t_j > 0$ *или* $\prod_{j=1}^{s} t_j = 0$. *И пусть* $\Omega(t)-$ *функция типа смешанного модуля гладкости порядка* k , *удовлетворяющая условиям* (S^α) и (S_β) *при некоторых* $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_s)$, $0 < \alpha_i < 1$ и $\beta = (\beta_1, ..., \beta_s)$ $0 < \beta_i < k$ $(i = 1, ..., s)$ *соответственно. Тогда* $(N > 0)$

$$\sup_{f \in SH_p^\Omega} E_{Q(\Lambda,N)}(f)_q \asymp \left[\sum_{n \in \Gamma^\perp(\Lambda,N)} \Omega^2(2^{-n}) \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Сравним теоремы 1.3.1 и 1.3.3 с аналогичными результатами из работ [1, Многомерная теорема Джексона в пространстве L_p //Матем. заметки.- 1992.- Т.52.- № 1.- С.105-113] и [2, Приближение многомерных функций с заданной мажорантой смешанных модулей непрерывности //Матем. заметки.- 1999.- Т.65.- № 1.- С.107-117.-47] Н.Н.Пустовойтова.

Во-первых, в частном случае $\Lambda(t) = \prod_{j=1}^{s} t_j$ оценки сверху в (15) совпадают с утверждением теоремы 3 из [1], носящими характер достаточного условия. Во-вторых, в работе [2] изучается только случай $\Lambda(t) = \Omega(t)$, т.е. случай, когда спектр приближающих полиномов жестко связан с заданной мажорантой $\Omega(t)$, в то время как в нашем случае $\Lambda(t)$ и $\Omega(t)$ независимы. Как показывает сравнение нашей теоремы 1.3.3 с теоремой 1 из [2], это обстоятельство существенным образом отражается на самом виде окончательного результата. В-третьих, теорема 1.3.1 применима при менее стеснительных ограничениях на $\Omega(t)$ нежели теорема 2 из [2]. Именно, в [2] при дополнительном условии принадлежности $\Omega(t)$ множеству

$$\bigcup_{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}<\alpha<1}(S^{\alpha}) \tag{16}$$

получено соотношение $(1\le p<q<\infty)$

$$\sup_{f\in SH_p^{\Omega}} E_{Q(\Omega,N)}(f)_q \asymp \frac{1}{N}\left[\sum_{n\in\Gamma^{\perp}(\Omega,N)\setminus\Gamma^{\perp}(\Omega,2^kN)} 2^{\|n\|_1\left(\frac{q}{p}-1\right)}\right]^{\frac{1}{q}}. \tag{17}$$

В теореме 1.3.1 условие (16) расширено до естественных границ и носит окончательный, в применяемых терминах, характер. Так, функция
$\Omega_1(t)=\prod_{j=1}^{s} t_j^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\left(ln\,\frac{1}{t_j}\right)^{-\beta_j}\quad(\beta_j>1\ \ (j=1,...,s))$
не принадлежит множеству (15), и потому соотношение (16) не применимо. Вместе с тем, для $\Omega_1(t)$ выполнено условие (S^{α}) при $\alpha=\frac{1}{p}-\frac{1}{q}$, так что в силу теоремы 1.3.1 получаем содержательный результат

$$\sup_{f\in SH_p^{\Omega_1}} E_{Q(\Omega_1,N)}(f)_q \asymp \sum_{n\in\Gamma^{\perp}(\Omega_1,N)}\prod_{j=1}^{s}\frac{1}{{n_j}^{\beta_j}}.$$

Наши результаты (Теоремы 1.3.1 и 1.3.3) подтверждают известные факты, что естественным аппаратом для приближения функций из $SH_p^{\Omega_0}$ являются полиномы с гармониками из гиперболических крестов.

Пусть $\omega_k(t)$ -заданная одномерная функция типа модуля гладкости порядка k, удовлетворяющая условиям (S^{α}) $(0<\alpha<1)$ и (S_{β}) при некотором $0<\beta<k$. Зададим смешанный модуль гладкости порядка k следующего специального вида:

$$\Omega_1(t)=\omega_k\left(\prod_{j=1}^{s}t_j\right). \tag{18}$$

Легко видеть, что для такого $\Omega_1(t)$ выполняются все свойства смешанного модуля гладкости порядка k.

Положим

$$\Lambda_1(t)=\prod_{j=1}^{s}t_j^{\gamma_j}\quad(\gamma_j>0\ (j=1,2,...,s)). \tag{19}$$

Теперь сформулируем некоторые следствия из теоремы 1.3.1.

Следствие 1.3.6. Пусть $1\le p<q<\infty$, k- целое положительное число и $\gamma=\gamma_1=...=\gamma_{\nu}>\gamma_{\nu+1}\ge...\ge\gamma_s>0$. $\omega_k(t)$- одномерная функция типа модуля гладкости порядка k, удовлетворяющая условиям (S^{α}) и (S_{β}) при некоторых $\frac{1}{p}-\frac{1}{q}<\alpha<1$ и $0<\beta<k$. Тогда

$$\sup_{f\in SH_p^{\Omega_1}} E_{Q(\Lambda_1,2^n)}(f)_q \asymp 2^{-\frac{1}{\gamma}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)n} n^{\frac{\nu-1}{q}}\omega_k(2^{-\frac{n}{\gamma}})\quad(n=1,2,...).$$

Следствие 1.3.6 при $\gamma_i = 1$ $(i = 1, ..., s)$ ранее было доказано Н.Н.Пустовойтовым.

Следствие 1.3.8. Пусть $1 < q \le p < \infty,\ p \ge 2,\ \gamma = \gamma_1 = ... = \gamma_\nu > \gamma_{\nu+1} \ge ... \ge \gamma_s > 0$ и $\omega_k(t)$ удовлетворяет условиям следствия 1.3.6. Тогда

$$\sup_{f \in SH_p^{\Omega_1}} E_{Q(\Lambda_1, 2^n)}(f)_q \asymp n^{\frac{\nu-1}{2}} \omega_k(2^{-\frac{n}{\gamma}}) \ \ (n = 1, 2, ...).$$

Также отметим следующую теорему.

Теорема 1.3.4. *Пусть параметры p и q удовлетворяют одному из следующих условий:*

1) $1 < q \le p < \infty,\ p \ge 2$;

2) $1 \le q \le p \le 2$;

Пусть, далее, $r > 0,\ k-$ целое положительное число и $\Lambda(t)-$ функция типа смешанного модуля гладкости порядка k, удовлетворяющая условиям (S^α) и (S_β) при некоторых $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_s),\ 0 < \alpha_i < 1$ и
$\beta = (\beta_1, ..., \beta_s),\ 0 < \beta_i < k$ $(i = 1, ..., s)$, *соответственно. Положим $\Omega(t) = \Lambda^r(t)$. Тогда* $(N > 0)$

$$\sup_{f \in SH_p^{\Lambda^r}} E_{Q(\Lambda, N)}(f)_q \asymp \frac{1}{N^r}(log_2 N)^{\frac{s-1}{p_0}},$$

где $p_0 = min(p, 2)$.

Эта теорема при $r = 1$ была доказана Н.Н.Пустовойтовым [2].

Теперь приведем многомерный аналог неравенства Бернштейна - обратную многомерную теорему теории приближений разных метрик.

Справедлива

Теорема 1.3.6. *Пусть $1 < p < q < \infty,\ 1 = \tau_1 \le \tau_2 \le \cdots \le \tau_s$, ω_k - функция типа модуля гладкости порядка k* и *$\{\lambda_n\}$- последовательность положительных чисел, $\lambda_n \downarrow 0$ $(n \uparrow \infty)$. Пусть функция $\Lambda(t)$ удовлетворяет условию (S^τ) на $(0, 1]^s$ при $\tau = (\tau_1, ..., \tau_s)$, $\Lambda(1) = 1$ и $\Lambda(t_1, ..., t_s)/t_1$ невозрастает на $(0, 1]$ при всех фиксированных $(t_2, ..., t_s)$. Тогда для того чтобы имело место вложение*

$$E_{p,\Lambda}(\lambda) \subset SH_q^{\Omega_1}$$

необходимо и достаточно, чтобы было выполнено условие

$$\tfrac{1}{2^{k\|n\|_1}} \left[\sum_{l=0}^{\|n\|_1} 2^{l\left(qk + \frac{q}{p} - 1\right)} {\lambda_l}^q\right]^{\frac{1}{q}} + \\ + \left[\sum_{l=\|n\|_1+1}^{\infty} 2^{l\left(\frac{q}{p} - 1\right)} {\lambda_l}^q\right]^{\frac{1}{q}} = O\left(\Omega_1\left(\tfrac{1}{2^n}\right)\right),$$

где

$$E_{p,\Lambda}(\lambda) = \{f(x) \in L_0^p(\pi_s) : E_{Q(\Lambda, 2^n)}(f)_p = O(\lambda_n) \\ (n \to \infty)\}.$$

В четвертом параграфе главы 1 изучены некоторые свойства пространств типа S-пространств Бесова со смешанным модулем гладкости порядка k.

Через $SB_{q,\theta}^{\Omega}$ $(1 \le q < \infty, 0 < \theta \le \infty)$ обозначим пространства функций $f \in L_0^q(0, 1)^s$, для которых конечна полунорма

$$\|f\|_{SB^{\Omega}_{q,\theta}} = \left(\int\limits_{[0,\pi]^s} [\Omega_k(f;t)_q/\Omega(t)]^{\theta} \prod_{j=1}^{s} t_j^{-1} dt \right)^{\frac{1}{\theta}} \leq 1.$$

Пространства SH^{Ω}_q и $SB^{\Omega}_{q,\theta}$ имеют своим источником классические пространства Липшица и Гельдера. Аналоги пространств Липшица и Гельдера - изотропные и анизотропные - пространства $H^{r_1,\dots,r_s}_q$ (пространства Никольского) функций многих переменных ввел С.М.Никольский. Обобщения этих пространств (пространства Бесова) определил О.В.Бесов. Пространства функций, производная которых удовлетворяет кратному условию Гельдера, ввели С.М.Никольский для функций в R^n и Н.С.Бахвалов для функций на T^n. Аналогично тому как в связи с классами Никольского были введены классы Бесова, в работе Т.И.Аманова в связи с классами функций с "доминирующей смешанной производной, удовлетворяющей кратному условию Гельдера"были введены аналоги классов Бесова - $SB^r_{q,\theta}$ - классы Никольского - Бесова - Аманова. Затем эти результаты были обобщены в работе О.В.Бесова, А.Д.Джабраилова. В работах Я.С.Бугрова и М.К.Потапова изучались H-классы при помощи приближения "углом".

Отметим ряд результатов, предшествовавших нашим результатам.

Для обобщенных классов Никольского SH^{Ω}_p условия вложения этого класса в пространство $L^q_0(0,1)^s$ $(1 \leq p < q < \infty)$ при некоторых ограничениях на функцию $\Omega(t)$ были получены в работах Динь Зунга [Приближение функций многих переменных на торе тригонометрическими полиномами //Матем. сборник.- 1986.- Т.131.- № 2.- С.251 - 271], Н.Н.Пустовойтова [Представление и приближение периодических функций многих переменных с заданным смешанным модулем непрерывности // Anal.Math.- 1994.- V.20.- P.35-48]. Этим утверждениям предшествуют работы многих математиков, берущие начало с одномерного результата П.Л.Ульянова [Вложение некоторых классов функций H^{ω}_p //Изв. АН СССР. Сер.матем.- 1968.- Т.32.- № 3.- С.649-686].

Задача вложения классов $SB^{r_1,\dots,r_s}_{p,\nu}$ в пространства $L^q_0(0,1)^s$ и $SB^{\gamma_1,\dots,\gamma_s}_{q,\theta}$ также хорошо изучена.

Приведем один из критериев вложения обобщенных классов Никольского - Бесова - Аманова $SB^{\Omega}_{q,\theta}$, где указан вид взаимоотношений между определяющими классы параметрами.

Теорема 1.4.5. *Пусть $1 < p \leq q < \infty$, $1 \leq \nu \leq \infty$, $\Omega(t)$ и $\Omega^*(t)-$ функции типа смешанного модуля гладкости порядка k* и *l соответственно, удовлетворяющие условию (S)*. Пусть *$\Omega(t)$ удовлетворяет условию (S_k), а $\Omega^*(t)-$ условию (S_l). Тогда для того чтобы имело место вложение*

$$SB^{\Omega}_{p,\infty} \subset SB^{\Omega^*}_{q,\nu}$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$\sum_{n \in Z^s_+} \left[2^{\|n\|_1 \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)} \Omega(2^{-n})/\Omega^*(2^{-n}) \right]^{\nu} < \infty.$$

Здесь и в дальнейшем, будем говорить, что функция многих переменных $\Omega(t) \geq 0$ удовлетворяет условию (S^k) $((S_k))$ при целом положительном $k > 0$, если $\Omega(t)$ удовлетворяет условию (S^{α}) $((S_{\alpha}))$ при $0 < \alpha_j < k$ $(j = 1, ..., s)$. Так же вводится условие (S) на $\varphi(\tau)$ как выполнение условия (S^{α}) для некоторого α, $0 < \alpha < 1$, и в этом смысле $(S) = \bigcup\limits_{0<\alpha<1} (S^{\alpha})$.

В четвертом параграфе главы 1 также получены многомерные прямые теоремы теории приближений с заданной мажорантой в пространстве Бесова. В них, при конкретизациях определяющих параметров, содержатся результаты из работ [Sun Yongsheng, Wang Heping. Reprezentation and approximation of multivariate periodic functions with bounded mixed moduli of smoothness //Труды МИ РАН.- 1997.- Т.219.- С.356-377], [Романюк А.С. Приближение классов Бесова периодических функций многих переменных в пространстве L_q // Украинский матем.журнал.- 1991.- Т.43.- № 10.- С.1398-1408], [Стасюк С.А. Найкращі наближення, колмогоровські та тригонометричні поперечники классів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ періодичних функцій багатьох змінних // Украинский матем.журнал.- 2004.- Т.56.- № 11.- С.1557-1567], так, имеет место

Теорема 1.4.6 *Пусть* $1 < p < q < \infty,\ \ 1 \leq \theta < \infty,\ \gamma = \gamma_j > 0\ (j = 1, ..., s)$, *$k$- целое положительное число. $\omega_k(t)$- одномерная функция типа модуля гладкости порядка k , удовлетворяющая условиям* (S^{α}) и (S_{β}) *при некоторых* $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} < \alpha < 1$ и $0 < \beta < k$. *Тогда*

$$\sup_{f \in SB^{\Omega_1}_{p,\theta}} E_{Q(\Lambda_1, 2^n)}(f)_q \asymp 2^{\frac{n}{\gamma}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)} n^{(s-1)\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{\theta}\right)_+} \omega(2^{-\frac{n}{\gamma}}) \quad (n = 1, 2, ...),$$

где $a = max(a, 0)$, а функций $\Omega_1(t),\ \Lambda_1(t)$ определены как в (18) и (19), соответственно.

Оценка сверху в теореме 1.4.6 при $\gamma_i = 1\ (i = 1, ..., s)$ ранее было доказано в работе [Sun Yongsheng, Wang Heping. Reprezentation and approximation of multivariate periodic functions with bounded mixed moduli of smoothness //Труды МИ РАН.- 1997.- Т.219.- С.356-377].

В первой главе диссертации нами также было получено распространение теоремы 1.2.3 на пространства Лоренца. Для формулировки этого результата напомним некоторые определения.

Всякую непрерывную, неубывающую, выпуклую вверх на отрезке $[0, 2\pi]$ функцию $\psi(t)$ такую, что $\psi(0) = 0$ называют φ-функцией. Определим соответственно "нижний"и "верхний"индексы φ-функции $\psi(t)$ следующим образом:

$$\alpha_{\psi} = \underline{\lim}_{t \to 0} \frac{\psi(2t)}{\psi(t)} \text{ и } \beta_{\psi} = \overline{\lim}_{t \to 0} \frac{\psi(2t)}{\psi(t)}.$$

Пусть даны число $q > 0$ и φ- функция $\psi(t)$. Тогда определим пространство Лоренца $\Lambda(\psi, q)$ как класс всех 2π- периодических измеримых функций f , для каждой из которых конечен функционал

$$\|f\|_{\psi,q} = \left\{ \int_0^{2\pi} [\psi(t) \frac{1}{t} \int_0^t f^*(x)dx]^q \frac{dt}{t} \right\}^{1/q},$$

где f^*-невозрастающая на $(0, 2\pi]$ перестановка $|f|$.

Справедлива

Теорема 1.2.2. *Пусть ψ_1 и ψ_2 – φ- функции такие, что* $1 < \alpha_{\psi_2},\ \beta_{\psi_2} < \alpha_{\psi_1}$, $\beta_{\psi_1} < 2$ *и пусть* $0 < p, q < \infty$. *Пусть к-целое положительное число, $\omega_k(\delta)$ -функция типа модуля гладкости k -го порядка, а*

$\lambda \equiv \{\lambda_n\}$- *последовательность положительных чисел,* $\lambda_n \downarrow 0\ (n \uparrow \infty)$. *Если выполнено условие*

$$\frac{1}{n^k} \left\{ \sum_{s=0}^{n} (s+1)^{qk-1} \left[\frac{\psi_2(\frac{1}{s+1})\lambda_s}{\psi_1(\frac{1}{s+1})} \right]^q \right\}^{\frac{1}{q}} = O\left(\lambda_n \frac{\psi_2(\frac{1}{n})}{\psi_1(\frac{1}{n})} \right),$$

то для того чтобы имело место вложение

$$E_{\psi_1,p}(\lambda) \hookrightarrow H^{\omega_k}_{\psi_2,q},$$

необходимо и достаточно,чтобы

$$\frac{1}{n^k}\left\{\sum_{s=0}^{n}(s+1)^{qk-1}\left[\frac{\psi_2(\frac{1}{s+1})\lambda_s}{\psi_1(\frac{1}{s+1})}\right]^q\right\}^{1/q}+$$
$$\left\{\sum_{s=n+1}^{\infty}\frac{1}{s}\left[\frac{\psi_2(\frac{1}{s})\lambda_s}{\psi_1(\frac{1}{s})}\right]^q\right\}^{1/q}=0\left(\omega_k\left(\tfrac{1}{n}\right)\right).$$

Достаточная часть теоремы справедлива при произвольных ψ_1, ψ_2 и λ без каких-либо ограничений.

Прямая теорема теории приближений для пространства Лоренца была получена в работе [Aganin A.I., Potapov M.K. On imbedding of function classes $H^{\omega}_{\psi_1,q_1}$ into classes $E_{\psi_2,q_2}(\lambda)$ //Acta Math.Hungar.- 1995.- Т.68.- № 3.- С.197-220].

Другой задачей, составляющей содержание данной диссертации, является изучения поведения тригонометрических полиномов из $T(Q(\Lambda, N))$ по отношению к двум группам вопросов (им посвящена вторая глава диссертации).

Здесь первая группа вопросов касается неравенств Джексона-Никольского и Бернштейна (нормы полинома и его производной (в том или ином смысле) измеряются в метрике пространства L^p, $1 < p < \infty$).

Сначала приведем определение обобщенной производной в смысле Вейля.

Пусть на Z^s определены функции, или, что то же самое, последовательности: действительнозначная $D(n)$ и $\alpha(n) = (\alpha_1(n), ..., \alpha_s(n))$ со значениями из R^s. В случае, когда $\alpha(n) \equiv \boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, ..., \alpha_s) \in R^s$, вся последователь
ность $\{\alpha(n)\}_{n\in Z^s}$ обозначается через $\boldsymbol{\alpha}$.

Предположим, что $f \in L(\pi_s)$ и

$$\sigma(f;x) \equiv \sum_{n\in Z^s}\hat{f}(n)e^{i(n,x)} \tag{20}$$

-её ряд Фурье-Лебега, а тригонометрический ряд

$$\sum_{n\in Z^s} D(n)e^{i(\frac{\pi\alpha(n)}{2},1)}\widehat{f}(n)e^{i(n,x)} \tag{21}$$

является рядом Фурье-Лебега некоторой функции. Эту функцию назовем (D, α)-производной функции f и обозначим через $f^{(D)}(x, \alpha)$, саму же функцию $f-(D, \alpha)$- дифференцируемой.

При $D(n) \equiv 1$, $\boldsymbol{\alpha} \equiv 0$ получаем $f^{(1)}(x, 0) \equiv f(x)$. При $s = 1$, целом положительном r и $D(n) = n^r, \alpha = r$ из приведенного определения, с соблюдением необходимых оговорок, получаем определение обычной производной $f^{(r)}$, а в симметричном случае $D(n) = n^{-r}$ $(n \neq 0), \alpha = -r$ $(D, \alpha)-$ дифференцирование функции $f \in L(\pi_1)$ с $\widehat{f}(0) = 0$ сводится к $r-$ кратному интегрированию ее ряда Фурье:

$$\sum_{n\in Z\setminus\{0\}}\hat{f}(n)\frac{e^{i(n,x)}}{(in)^r} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)\Psi_r(x-t)dt,$$

где

$$\Psi_r(t) = \sum_{n\in Z\setminus\{0\}} \frac{e^{i(n,t)}}{(in)^r}$$

есть алгебраический многочлен степени r при $-\pi < t < \pi$. Таким образом, при $s = 1$ и $D(n) = |n|^r$ $(n \neq 0)$ $, \alpha(n) = rsignn$ для целых r в определении (20) - (21) содержится обычное интегрирование при $r < 0$ и дифференцирование при $r > 0$, обьединенное под общим названием "дифференцирование".

Дальнейшее обобщение производной состояло в замене числа r под знаком exp на произвольное число α. По-видимому, впервые это было предложено в [Nady B. Sur une classe generale de procedes de sommation pour les series de Fourier //Hung.Acta Math.- 1948.- V.1.- № 3.- P.14-62]. Смысл введения α состоит в том, что при $\alpha = r + 2k$ $(k -$ целое) (D, α)- производная совпадает с производной (D, r), а при $\alpha = r + 1 + 2k$- с функцией, сопряжённой с (D, r) -производной.

В одномерном случае исследования с привлечением (D, α)- производных с различными условиями на D и α проведены разными авторами.

Предложенное нами определение (20) - (21) есть обобщение операции дифференцирования в многомерном случае. Формально оно сводится к замене множителя $D(n)$ и $\alpha(n)$ на функции многих переменных. При $D(n) = \prod_{j=1}^{s} |n_j|^{r_j}$ и $\alpha_j(n) = \alpha_j sgnn_j$ получаем определение $(r, \boldsymbol{\alpha})$- производной функции f.

Начнем с неравенств типа Джексона-Никольского.

Для тригонометрических полиномов, имеющих степень n_j по переменной x_j, С.М.Никольский [Неравенства для целых функций конечной степени и их применение в теории дифференцируемых функций многих переменных // Труды МИАН СССР.- 1951.- Т.38.- С.244-278] получил неравенства

$$\|T_{n_1,\ldots,n_s}(x)\|_q \leq 2^s \left(\prod_{j=1}^{s} n_j\right)^{\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)} \|T_{n_1,\ldots,n_s}(x)\|_p, \quad (1 \leq p < q \leq \infty).$$

В случае $s = 1,$ $q = \infty$ соответствующее неравенство доказал Д.Джексон [Certain problem of closest approximation // Bull.Amer.Math.Soc.- 1933.- V.39.- P.889-906.].

Неравенствами Джексона- Никольского называют неравенства, связывающие различные нормы полиномов.

Неравенство Джексона- Никольского для полиномов со спектром из произвольного конечного множества $G \subset Z^s$ ранее изучались многими авторами. В основном развитие этой темы можно классифицировать по следующим характеристикам:

1. по числу точек спектра полинома ;

2. по геометрии спектра полинома.

Отметим также, в некотором смысле особняком стоящую, статью Е.С.Смаилова [О влиянии геометрических свойств спектра многочлена на неравенства разных метрик С.М.Никольского // Сиб.матем.журнал.- 1998.- Т.39.- № 5.- С.1157-1163], где рассматривается следующая задача: указать семейство тригонометрических полиномов T(G) для которой имеет место соотношение заданного вида, именно $(1 \leq p < q < \infty)$

$$\tau_{p,q}(T(G)) = \tau(T(G)) = \sup_{t\in T(G)} \frac{\|t\|_q}{\|t\|_p} \asymp |G|^{\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)},$$

где $|E|$-количество элементов конечного множества E.

Что касается первой задачи, то имеет место соотношение

$$\tau(N)=\tau(T(G))=\sup_{t\in T(G),|G|=N}\frac{\|t\|_q}{\|t\|_p}\asymp N^{max(1,\frac{p}{2})(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}\quad (N=1,2,...),$$

где оценка снизу получена Э.С.Белинским [Две экстремальные задачи для тригонометрических полиномов с заданным числом гармоник //Матем. заметки.- 1991.- Т.49.- № 1.- С.12-18],а оценка сверху - Несселем и Вилмсом [Nessel R.J., Wilmes G. Nicolskii type inequalities for trigonometric polinomials and entire functions //J. Austral.Math.Soc.- 1978.- Ser.A.- V.25.- P.7-18] (случай $1\le p\le 2, p<q\le\infty$), в общем случае -1 $\le p< q\le\infty$ В.А.Родиным [Неравенства для тригонометрических полиномов с лакунами в пространствах L_p //Исследования по теории функций многих переменных. Ярославль, 1990.- С.128-133].

Относительно второй задачи отметим результат В.Н.Темлякова [Приближение функций с ограниченной смешанной производной. //Труды МИАН СССР.- 1986.- Т.178.- С.3-112], предшествующий нашим результатам.

Когда $G=Q_m^\gamma$ есть ступенчатые гиперболические кресты (множество, составленное из всех n таких, что $n\in Q(\prod_{j=1}^{s}t_j^{\gamma_j},2^m)\equiv Q_m^\gamma$ называют ступенчатым гиперболическим крестом) В.Н.Темляковым было получено соотношение $(1=\gamma_1=...=\gamma_\nu<\gamma_{\nu+1}\le ...\le\gamma_s)$

$$\tau(T(Q_m^\gamma))\asymp 2^{m(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}\ (m=1,2,...).$$

При $2<p<q\le\infty$ и фиксированном G для $T(G)$ Е.С.Смаиловым [1, О влиянии геометрических свойств спектра многочлена на неравенства разных метрик С.М.Никольского // Сиб.матем.журнал.- 1998.- Т.39.- № 5.- С.1157-1163] получена оценка

$$\tau(T(G))\ll\left\{min\left(|G^{\frac{p^*}{2}}|^{\frac{p}{p^*}};|G^{\frac{p_*}{2}}|\right)\right\}^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}},$$

где p^* и $p_*,\ \ p_*\le p\le p^*$ - ближайшие к p четные числа, а G^r - алгебраическая прямая сумма из r равных G слагаемых.

Что касается третьей задачи, если A_c - семейство с-регулярных множеств и $G\in A_c$,то (см. Е.С.Смаилов [1])

$$\frac{\|t\|_q}{\|t\|_p}\ll|G|^{(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})},\ 1\le p<q\le\infty$$

для каждого тригонометрического полинома t из $T(G)$.

Нами в случае - спектра установлены следующие теоремы типа Джексона-Никольского и Бернштейна.

Теорема 2.2.5. *Пусть даны числа* $1<p<q<\infty,\ \ 0<\tau_1\le\tau_2\le\cdots\le\tau_s$. *Пусть функция* $\Lambda(t)$ *удовлетворяет условию* $(S^{\boldsymbol{\tau}})$ на $(0,1]^s$ при $\boldsymbol{\tau}=(\tau_1,...,\tau_s)$, $\Lambda(1)=1$ *и* $\Lambda(t_1,...,t_s)/t_1^{\tau_1}$ *невозрастает на* $(0,1]$ *при фиксированных* $(t_2,...,t_s)$. *Тогда*

$$\sup_{t\in T(Q_0(\Lambda,N))}\frac{\|t\|_q}{\|t\|_p}\asymp N^{\frac{1}{\tau_1}(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}.$$

Здесь

$$Q_0(\Lambda,N)=\bigcup_{n\in\Gamma_0(\Lambda,N)}\rho(n),\Gamma_0(\Lambda,N)=\left\{m\in Z_0^s:\Lambda(2^{-m})\ge\tfrac{1}{N}\right\},,$$
$$\rho(n)=\{m=(m_1,...,m_s)\in Z^s:\ [2^{n_j-1}]\le|m_j|<[2^{n_j}]\}\ \ (n\in Z_0^s).$$

где $[a]$ - целая часть числа a.

Множество функций, удовлетворяющих условиям этой теоремы достаточно широк. В частности, функции вида

$$\Lambda(t_1, t_2, ..., t_s) = t_1^{\tau_1} \cdot \Lambda_1(t_2, t_3, ..., t_s),$$

принадлежат этому множеству, если $\Lambda_1(t_2, t_3, ..., t_s)$ удовлетворяет условию $(S^{(\tau_2,...,\tau_s)})$ на $(0,1]^{s-1}$ при $\tau_1 \leq \tau_2 \leq \tau_3 \leq \cdots \leq \tau_s$.

Например, в качестве $\Lambda(t_1, t_2, ..., t_s)$ можно взять функцию

$$\Lambda(t_1, t_2, ..., t_s) = t_1^{\tau_1} \cdot \frac{t_2{}^{\tau_2}}{\left(log\frac{1}{t_2}\right)^{b_2}} \cdots \frac{t_s{}^{\tau_s}}{\left(log\frac{1}{t_s}\right)^{b_s}} \ (0 < t_j < 1 \ (j = 1, ..., s)),$$
$$\Lambda(t_1, t_2, ..., t_s) = 0, \quad \prod_{j=1}^{s} t_j = 0,$$

при $\tau_1 \leq \tau_2 \leq \tau_3 \leq \cdots \leq \tau_s$ и $b_j \geq 0$ $(j = 2, ..., s)$.

Теорема 2.2.3. *Пусть даны числа* $1 < p < \infty$, $\alpha \in R^s$, $0 < \tau_{j_1} = \cdots = \tau_{j_\nu} < \tau_{j_{\nu+1}} \leq \cdots \leq \tau_{j_d}$ $, 0 < \beta_{j_1} = \cdots = \beta_{j_t} < \beta_{j_{t+1}} \leq \cdots \leq \beta_{j_d}$ $(1 \leq \nu \leq t \leq d)$ *такие, что* $\beta_{j_m}\tau_{j_1} \leq \beta_{j_1}\tau_{j_m}$ $(m = t+1, ..., d)$. *И пусть при каждом* $j_m \in e = (j_1, j_2, ..., j_d)$ *функция* $\Lambda(t)$ *удовлетворяет условию* $(S^{\tau_{j_m}})$ *по* j_m*-й переменной и* $\Lambda(t_1, ..., t_s)/t_{j_1}^{\tau_{j_1}}$ *невозрастает на* $(0,1]$ *при фиксированных* $(t_1, ..., t_{j_1-1}, t_{j_1+1}, ..., t_s$ *и* $\Lambda(2^{-1}) = 1$. *Тогда*

$$\sup_{t \in T(Q(\Lambda,N))} \frac{\left\|t^{(\beta(e))}(x, \alpha(e))\right\|_p}{\|t(x)\|_p} \asymp N^{\frac{\beta_{j_1}}{\tau_{j_1}}}.$$

Рассмотрим функцию $\Lambda_2(t)$ вида

$$\Lambda_2(t) = \Lambda_2(t_1, t_2) = \frac{t_1^r}{\left(log\frac{1}{t_1}\right)^{b_1}} \frac{t_2^r}{\left(log\frac{1}{t_2}\right)^{b_2}} \ (0 < t < 1),$$
$$\Lambda_2(0,0) = \Lambda_2(t_1, 0) = \Lambda_2(0, t_2) = 0, \quad 0 < r < k,$$

Так как $r < k$,то $\Lambda_2(t)$ обладает всеми свойствами смешанного модуля гладкости порядка k. Для выбранной $\Lambda_2(t)$ положим $\Gamma(\Lambda_2, N) = \Gamma(N)$ и $Q(\Lambda_2, N) = Q(N)$.

Имеет место

Теорема 2.3.11. *Пусть* $1 < p \leq q < \infty$, $\beta \geq 0$, $r > 0$ *и выполнены одно из условий*

1) $0 < b_2 \leq b_1, 1 + \frac{r}{b_1} < p \leq q \leq \frac{1}{1+\beta}\left(1 + \frac{r}{b_2}\right)$;

2) $b_1 > 0, b_2 \leq 0, 1 + \frac{r}{b_1} < p \leq q$.

Тогда

$$\sup_{t \in T(Q(N))} \frac{\left\|t^{(\beta)}(x)\right\|_q}{\|t(x)\|_p} \asymp N^{\frac{1}{r}\left(\beta + \frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)} \cdot (log\ N)^{-\frac{b_2}{r}\left(\beta + \frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)}.$$

Отметим, что функция $\Lambda_2(t)$ не удовлетворяет условиям теоремы 2.2.5. Поэтому оценки приведенные в теореме 2.3.11 нельзя получить с помощью теоремы 2.2.5.

В этой главе нами также получены неравенства типа Бернштейна для (D, α) - производных тригонометрических полиномов из $T(Q(\Lambda, N))$, т.е. нормы полинома и его (D, α) - производной измеряются в метрике пространства L^p $(1 < p < \infty)$.

Конкретизируя $\Lambda(t)$, в ряде случаев из приведенных выше утверждений можно получить не только известные оценки,а можно получить точных в смысле порядка неравенств типа Бернштейна и Джексона- Никольского.

Порядковые оценки производных Λ- ядра Дирихле. Вторая группа вопросов связана с оценкой норм производных (в том или ином смысле) ядер Дирихле по произвольным гармоникам.

В дальнейшем, для вектора $r \in R^s$ при

$$D(n) = D(n_1, ..., n_s) = \prod_{j=1}^{s} |n_j|^{r_j} \ , \alpha_j(n) = r_j sgn n_j \ (j = 1, ..., s)$$

(D, α)- производную функции $f(x)$ (если существует) обозначим через $f^{(r)}(x)$.

Для функции $\Lambda(t)$ введем функцию

$$M_{Q(\Lambda,N)}(x) = \sum_{n \in \Gamma(\Lambda,N)} \delta_n(x), \delta_n(x) = \sum_{m \in \rho(n)} e^{i(m,x)}, \ x \in R^s,$$

где, напомним,

$$\rho(n) = \{m = (m_1, ..., m_s) \in Z^s : \ 2^{n_j - 1} \leq |m_j| < 2^{n_j}\} \ \ (n \in Z^s_+).$$

Также формально определим (поскольку на самом деле будем изучать $F^{(\beta)}_{Q(\Lambda,N)}(x)$)

$$F_{Q(\Lambda,N)}(x) = \sum_{n \in \Gamma^{\perp}(\Lambda,N)} \delta_n(x).$$

Назовем функцию $M_{Q(\Lambda,N)}(x)$ многомерным Λ - ядром Дирихле. Гармоники функции $M_{Q(\Lambda,N)}(x)$ лежат внутри, а функции $F_{Q(\Lambda,N)}(x)$ вне множества $Q(\Lambda, N)$.

Работы К.И.Бабенко, Я.С.Бугрова, Н.С.Никольской, С.А.Теляковского, В.Н.Темлякова, К.И.Оскольковa, А.А.Юдина и В.А.Юдина, Э.М.Галеева и других показывают, что многие вопросы теории гармонического анализа и теории приближений функций многих переменных тесно связаны с оценками норм в различных метриках ядер, подобных ядрам Дирихле. Для ступенчатых гиперболических крестов точные порядковые оценки норм функций
$M^{(\beta)}_{Q(\Lambda,2^{\mu})}(x) = M^{(\beta)}_{\gamma,\mu}(x)$ и $F^{(\beta)}_{Q(\Lambda,2^{\mu})}(x) = F^{(\beta)}_{\gamma,\mu}(x)$
в смешанной норме пространства $L^p(\pi_s)$ $(1 < p < \infty)$ были установлены в работе Э.М.Галеева [Порядковые оценки производных периодического многомерного α- ядра Дирихле в смешанной норме //Матем. сборник.- 1982.- Т.117(159).- № 1.- С.32-43].

Нами установлены точные порядковые оценки норм функций $M^{(\beta)}_{Q(\Lambda,N)}(x)$ и $F^{(\beta)}_{Q(\Lambda,N)}(x)$ в $L^p(\pi_s)$ $(1 < p < \infty)$, а именно справедливы (всюду ниже полагаем $\frac{1}{p} = 0$ при $p = \infty$ и $p_0 = p_0(p)$ в соответствии с правилом $p_0 = p$ при $1 < p < \infty$, $p_0 = 1$ при $p = \infty$)

Теорема 2.3.7. *Пусть* $1 < p \leq \infty$, $\beta \in R^s$. *Тогда*

$$\left\| M^{(\beta)}_{Q(\Lambda,N)}(x) \right\|_p \asymp \left(\sum_{n \in \Gamma(\Lambda,N)} 2^{p_0\left(n, \beta + 1 - \frac{1}{p}\right)} \right)^{\frac{1}{p_0}}. \tag{22}$$

Теорема 2.3.8. *Пусть* $1 < p \leq \infty$, $\beta \in R^s$. *Функция* $F^{(\beta)}_{Q(\Lambda,N)}(x))$ *принадлежит пространству* $L^p(\pi_s)$ *тогда и только тогда,когда*

$$\sum_{n \in Z^s_+} 2^{p_0\left(n, \beta + 1 - \frac{1}{p}\right)} < \infty. \tag{23}$$

При этом, если выполнено условие (23), *то*

$$\left\| F^{(\beta)}_{Q(\Lambda,N)}(x) \right\|_p \asymp \left(\sum_{n \in \Gamma^{\perp}(\Lambda,N)} 2^{p_0\left(n, \beta + 1 - \frac{1}{p}\right)} \right)^{\frac{1}{p_0}}. \tag{24}$$

В соотношениях (22) и (24) даются общий вид оценки ядра Дирихле $M_{Q(\Lambda,N)}(x)$ и функции $F_{Q(\Lambda,N)}(x)$, когда спектр ядра принадлежит множеству, порожденному функцией $\Lambda(t)$. При конкретном выборе $\Lambda(t)$, оценивая суммы в правых частях (22) и (24) можно получить ряд известных и новых результатов. Приведем некоторые из них.

Для ступенчатых гиперболических крестов, в случае

$$\begin{array}{l} \gamma_j > 0,\ r_j = \frac{1}{\gamma_j}\left(\beta_j + 1 - \frac{1}{p}\right)\ (j = 1, ..., s), \\ r = r_1 = ... = r_\nu > r_{\nu+1} \geq ... \geq r_s, \end{array}$$

из (24) получаем двусторонние оценки

$$\left\|M^{(\beta)}_{\gamma,\mu}(x)\right\|_p \asymp \begin{cases} 2^{r\mu} \cdot \mu^{\frac{\nu-1}{p}}, & r > 0; \\ \mu^\nu, & r = 0; \\ 1, & r < 0. \end{cases}$$

Далее, если $r_j < 0$ $(j = 1, ..., s)$, то из соотношения (24) вытекает следующая оценка

$$\left\|F^{(\beta)}_{\gamma,\mu}(x)\right\|_p \asymp \left(\sum_{(\gamma,n)>\mu} 2^{p(n,\beta)} \cdot 2^{p\left(1-\frac{1}{p}\right)\|n\|_1}\right)^{\frac{1}{p}} \asymp 2^{r\mu}\mu^{\frac{\nu-1}{p}}.$$

Эти две оценки известны и, как отметили выше, ранее получены Э.М. Галеевым.

К новым, по крайней мере нам не неизвестным, относится

Следствие 2.3.1. Пусть $1 < p \leq \infty,\ \beta, b_1, b_2 \in R,\ r > 0$ и $\beta + 1 - \frac{1}{p} > 0$. Тогда

$$\left\|M^{(\beta)}_{Q(N)}(x)\right\|_p \asymp N^{\frac{\alpha_0}{rp_0}} \left(\Phi(b_1, b_2, r, \alpha_0, N)\right)^{\frac{1}{p_0}},$$

где

$$\alpha_0 = p_0\left(\beta + 1 - \frac{1}{p}\right),$$

$$\Phi(b_1, b_2, r, \alpha_0, N) = \begin{cases} (log\ N)^{-\frac{b_1\alpha_0}{r} - \frac{b_2\alpha_0}{r} + 1},\ b_1\alpha_0 < r, b_2\alpha_0 < r; \\ (log\ N)^{-\frac{b_1\alpha_0}{r}} \cdot log\ log\ N,\ b_1\alpha_0 \leq r, b_2\alpha_0 = r; \\ (log\ N)^{-\frac{b_2\alpha_0}{r}} \cdot log\ log\ N,\ b_1\alpha_0 = r, b_2\alpha_0 \leq r; \\ (log\ N)^{-\frac{b_1\alpha_0}{r}},\ b_1\alpha_0 \leq r, b_2\alpha_0 > r; \\ (log\ N)^{-\frac{b_2\alpha_0}{r}},\ b_1\alpha_0 > r, b_2\alpha_0 \leq r; \\ (log\ N)^{-\frac{b\alpha_0}{r}},\ b_1\alpha_0 > r, b_2\alpha_0 > r, \\ \qquad b = min\{b_1, b_2\}. \end{cases}$$

В параграфе 2.3 главы 2 также установлены оценки норм функций $M^{(D)}_{Q(\Lambda,N)}(x, \alpha)$ и $F^{(D)}_{Q(\Lambda,N)}(x, \alpha)$ в норме пространства L^p при $1 < p < \infty$ и рассмотрены их точность при некоторых ограничениях на функции $\Lambda(t),\ D(n),\ \alpha(n)$.

В параграфе 2.4 главы 2 получены оценки наилучших приближений (или смешанного модуля гладкости порядка k) (D, α)- производной функции f(x)(в L^q) через наилучшие приближения (или смешанный модуль гладкости порядка k) функции f(x)(в L^p, $1 \leq p < q < \infty$).

Во второй главе также приведены применения неравенств Бернштейна и Джексона - Никольского для получения теорем вложения в стиле теорем Конюшкова - Стечкина и Ульянова.

В третьей, завершающей, главе диссертации изучается задача численного интегрирования функций из $H-B$-классов "с доминирующей смешанной разностью"и W-классов Соболева "с доминирующей смешанной производной".

Идея представленного здесь исследования заключается в следующем.

В случае классов периодических непрерывных функций $F(0,1)^s$ ориентиром для подбора оптимальных или близких к оптимальным квадратурных формул служит геометрия множества "больших"коэффициентов
Фурье

$$\Gamma_\varepsilon = \left\{ m \in Z^s : \sup_{f \in F(0,1)^s} |\widehat{f}(m)| \geq \varepsilon > 0 \right\}, \tag{25}$$

где

$$\widehat{f}(m) = \int\limits_{[0,1]^s} f(x) e^{-2\pi i (m,x)} dx$$

-тригонометрические коэффициенты Фурье-Лебега, поскольку имеется прямая связь между сеткой узлов в $[0,1]^s$ квадратурной формулы и решеткой B в Z^s, носителя тригонометрических коэффициентов Фурье, выражающей возникающую погрешность приближения.

Так, в случае квадратурной формулы с равными весами и равномерной сеткой узлов имеет место равенство

$$\int\limits_{[0,1]^s} f(x)dx - \frac{1}{N^s} \sum_{n_1=1}^{N} \cdots \sum_{n_s=1}^{N} f\left(\frac{n_1}{N}, ..., \frac{n_s}{N}\right) = \sum_{m \in Z^s} \widehat{f}(m) \chi_B(m),$$

где

$$B = \{(l_1 N, ..., l_s N) : (l_1, ..., l_s) \in Z^s - \{0\}\},$$

χ_Ω есть характеристическая функция множества Ω. Отсюда видно, что для уменьшения погрешности квадратурной формулы надлежит сетку, или, то же самое, носитель B коэффициентов Фурье выбрать таким, чтобы не пересекалась с (25), т.е. "занулить большие коэффициенты"и чтобы сетка имела как можно меньше узлов.

В этом подходе крайними примерами множеств являются шары ($\overline{y}_j = \max(1; |y_j|)$)

$$V_R = \left\{ m \in Z^s : \overline{m}_1^2 + \cdots + \overline{m}_s^2 \leq R^2 \right\}$$

и гиперболические кресты

$$\Gamma_R = \{ m \in Z^s : \overline{m}_1 \cdots \overline{m}_s \leq R \},$$

определяемые обычными классами Соболева

$$W_2^r = \left\{ f \in L(0,1)^s : \sum_{m \in Z^s} \left|\widehat{f}(m)\right|^2 (\overline{m}_1^{2r} + \cdots + \overline{m}_s^{2r}) \leq 1 \right\}$$

и Коробова

$$E_s^r = \left\{ f \in L(0,1)^s : |\widehat{f}(m)| \leq (\overline{m}_1 \cdots \overline{m}_s)^{-r} \right\}$$

соответственно.

Для класса W_2^r при $R \asymp N$ шар V_R будет соизмерим с наибольшим кубом $B_N = (-N,N)^s \cap Z^s$, для которого $V_R \cap B = \{0\}$, а соответствующая квадратурная формула будет иметь неулучшаемую в смысле порядка погрешность.

Но если ту же квадратурную формулу применить для класса E_s^r, то будут занулены лишние гармоники, количество которых в степенной шкале в s раз превышают обьем B_N, и, как следствие, соответствующая квадратурная формула будет в степенной шкале завышена в s раз.

Получение оптимальных или близких к оптимальным квадратурных формул для классов Коробова и близких к ним (обычно это классы с "доминирующей смешанной производной"и с "доминирующей смешанной разностью"), к которым относятся и классы SH_p^Ω,$SB_{q,\theta}^\Omega$ и $SW_{q,\alpha}^{(D)}$ требует привлечения иных методов, главным образом, теоретико-числовых.

К настоящему времени для классов $SW_q^r (2 \le q < \infty,\ rq > 1)$ найдены правильные порядки убывания погрешностей оптимальных квадратурных формул :

$$R_N\left(SW_q^r\right) \asymp N^{-r}(log\ N)^{\frac{s-1}{2}}(2 \le q < \infty,\ 1 < rq),$$

(снизу - В.А.Быковский [О правильном порядке погрешности оптимальных кубатурных формул в пространствах с доминирующей смешанной производной и квадратических отклонениях сеток //Владивосток, Препринт. ВЦ ДВНЦ АН СССР.- 1985.- № 23.- 31 с.] $(q = 2, r = 1, 2, ...)$,В.Н.Темляков [Об одном приеме получения сеток снизу погрешностей квадратурных формул //Матем.сборник.- 1990.- Т.181.- № 10.- С.1403-1413] $(2 < q < \infty,\ 1 < rq)$; сверху - Н.С.Бахвалов [О приближенном вычислении кратных интегралов //Вестник МГУ. Серия.матем.,мех.- 1959.- № 4.- С.3-1] $(s = 2, r = 1, 2, ...)$, К.К.Фролов [Оценки сверху погрешности квадратурных формул на классах функций //Докл.АН СССР.- 1976.- Т.231.- № 4.- С.818-821] $(s, r = 1, 2, ...)$, В.Н.Темляков [Об одном приеме получения сеток снизу погрешностей квадратурных формул //Матем. сборник.- 1990.- Т.181.- № 10.- С.1403-1413] $(2 < q < \infty,\ 1 < rq)$.

А для классов SH_q^r, SB_q^r, порождаемых мажорантой $\Omega(t) = \prod\limits_{j=1}^{s} t_j^{r_j}$ $(r_1 = ... = r_\nu < r_{\nu+1} \le ... \le r_s,\ 1 \le \nu \le s)$ установлены следующие неулучшаемые порядки убывания погрешностей оптимальных квадратурных формул :

$$R_N\left(SH_q^r\right) \asymp N^{-r_1}(log\ N)^{s-1}(1 < q \le \infty,\ 1 < r_1 q),$$

(снизу - Н.С.Бахвалов [Оценки снизу асимптотических характеристик функций с доминирующей смешанной производной //Матем. заметки.- 1972.- Т.12.- № 6.- С.655-664]; сверху - Н.С.Бахвалов [О приближенном вычислении кратных интегралов //Вестник МГУ. Серия.матем.,мех.- 1959.- № 4.- С.3-1] $(s = 2, r = 1, 2, ...)$, В.В.Дубинин [Об оптимальных формулах для классов функций с ограниченной смешанной разностью //Матем. заметки.- 1990.- Т.49.- № 1.- С. 149-151] $(1 < q \le \infty,\ 1 < r_1))$;

$$R_N\left(SB_{q,\theta}^{r_1,\dots,r_s}\right) \asymp N^{-r_1}(log\ N)^{\frac{\nu-1}{\theta'}}$$
$$(1 \le q \le \infty,\ 1 < r_1 q,\ 1 \le \theta < \infty, \tfrac{1}{\theta} + \tfrac{1}{\theta'} = 1)$$

(В.В.Дубинин [Кубатурные формулы для классов Бесова
// Изв. РАН. Сер.матем.- 1997.- Т.61.- № 2.- С.27-52]).

Цель работы состоит в построении квадратурных формул для классов SH_q^Ω, $SB_{q,\theta}^\Omega$ и $SW_{q,\alpha}^{(D)}$, чтобы одновременно обеспечивалась простота сетки, эффективность и близость к оптимальному алгоритма построения сетки. Простота сетки состоит в ее сверхэкономной записи ($\{\cdots\}$- дробная часть)

$$\xi_k = \left(\left\{\frac{k}{N}a_1\right\}, ..., \left\{\frac{k}{N}a_s\right\}\right) \ (k = 1, ..., N),$$

когда по $(s+1)$ целым числам $(N, a_1, ..., a_s)$ за $\asymp N$ элементарных арифметических операций легко выписывается сетка произвольного обьема N.

Отметим, что методы, используемые при решении поставленных задач, в такой форме были предложены С.М.Ворониным и Н.Темиргалиевым.

Обозначим $SW^{(D)}_{q,\alpha}$ $(1 \le q < \infty)$ класс функций $f(x)$,таких,что $f^{(D)}(x,\alpha) \in L^q_0(\pi_s)$ и $\|f^{(D)}(x,\alpha)\|_q \le 1$.

Для произвольных r класс SW^r_q хорошо известен. Также отметим,что в случае $r \in Z^s_+$ класс SW^r_q аналогичен классу функций $f \in L^q_0(\pi_s)$ таких,что $\|f^{(r)}\|_q \le 1$.

Перед тем, как перейти к формулировкам теорем, сообщим, что эффективный алгоритм, согласно которому каждому конечному множеству $E \subset Z^s$ за $\ll f(E) ln\, ln f(E)$ элементарных арифметических операций ставится в соответствие простое p, $p \equiv 1(mod\, l)$, $p \ll f(E)$ и набор целых чисел $a_1, ..., a_s$, при $3 \le l \le 19$, где $f(E) = \sum\limits_{m \in E^*} lnN(m)$, был предложен Н.Темиргалиевым [Об эффективности алгоритмов численного интегрирования и восстановления функций многих переменных. Дис.на соискание уч. степени докт.физ.-мат.наук: 01.01.01. М.: МИАН, 1991].

Всюду в диссертации мы будем пользоваться алгоритмом из [Н.Темиргалиев, Е.А.Баилов, А.Ж.Жубанышева. Об общем алгоритме численного интегрирования периодических функций многих переменных //Докл. РАН.- 2007.- Т.416.- N2.- С.169-173], в случае произвольных $s = l - 1$, где $l \ge 3$- простое число.

Нами доказаны следующие

Теорема 3.2.1. *Пусть даны простое число* $l = s+1$, числа $1 < q \le 2$, $0 < \tau_1 = ... = \tau_\nu < \tau_{\nu+1} \le ... \le \tau_s$ $(1 \le \nu \le s)$ и $\Lambda(t)$ *- неубывающая функция по каждой переменной, удовлетворяющая условиям* (S^τ) при $\tau = (\tau_1, ..., \tau_s)$ и (S_β) при $\beta = (\beta_1, ..., \beta_s)$, $\beta_i \ge 1$. *И пусть функция* $D(n) \ne 0$ *удовлетворяет условию*

$$\left|\frac{D(2^n)}{D(m)}\right| \le C \ \ (m \in \rho(n), \ n \in Z^s_+)$$

для некоторого $\ > 0$. *Тогда для всякого* $R > C^{\tau_1}(l)$ *существуют простое число* p, $p \equiv 1(mod\ l)$, $p \ll lnR$ *и целое число* $a, (a,p) = 1$, $a^{\frac{p-1}{l}} \not\equiv 1(mod\, p)$ *для отыскания которых достаточно выполнить* $<< lnR \cdot lnlnlnR$ *элементарных арифметических операций, такие, что*

$$\sup_{f \in SW^{(D)}_{q,\alpha}} \left| \int\limits_{[0,1]^s} f(x)dx - \frac{1}{p}\sum_{n=1}^{p} f\left(\left\{\frac{n}{p}a_1\right\}, ..., \left\{\frac{n}{p}a_s\right\}\right)\right| \ll$$

$$\ll \frac{1}{R^{\frac{1}{q}}} \sum_{l=\theta}^{\infty} 2^{\frac{l}{q}} \left(\sum_{n \in \Gamma(\Lambda, 2^{l+1}) \setminus \Gamma(\Lambda, 2^l)} \frac{2^{(n,\beta-\tau)}}{|D(2^n)|^q}\right)^{\frac{1}{q}} \ \ (2^\theta \le R < 2^{\theta+1}).$$

Теорема 3.2.2. *Пусть даны простое число* $l = s + 1$, *числа* $1 < q \le 2$, $0 < \alpha_1 = ... = \alpha_\nu < \alpha_{\nu+1} \le ... \le \alpha_s$ $(1 \le \nu \le s)$ и $\Lambda(t)$ *- неубывающая функция по каждой переменной, удовлетворяющая условиям* $(S^{\boldsymbol{\alpha}})$ *при* $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, ..., \alpha_s)$ и $(S_{\boldsymbol{\beta}})$ *при* $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, ..., \beta_s)$, $\beta_i \ge 1$. *Пусть* $\Omega(t)$ *- функция типа смешанного модуля гладкости порядка* k *и удовлетворяет условиям* (S) и $(S_{\boldsymbol{\gamma}})$ *при* $\boldsymbol{\gamma} = (\gamma_1, ..., \gamma_s)$, $0 < \gamma_i < k$. *Тогда* *для всякого $R > C^{\alpha_1}(l)$ существуют простое число p, $p \equiv 1(mod\ l)$, $p \ll lnR$ и целое число $a, (a,p)=1$, $a^{\frac{p-1}{l}} \not\equiv 1(mod\, p)$ для отыскания которых достаточно выполнить $<< lnR \cdot lnlnlnR$ элементарных арифметических операций, такие, что*

$$\sup_{f \in H_q^{\Omega}} \left| \int\limits_{[0,1]^s} f(x)dx - \tfrac{1}{p} \sum_{n=1}^{p} f\left(\left\{ \tfrac{n}{p} a_1 \right\}, ..., \left\{ \tfrac{n}{p} a_s \right\} \right) \right| \ll$$
$$\ll \tfrac{1}{R^{\frac{1}{q}}} \sum_{n \in \Gamma^{\perp}(\Lambda,R)} \Omega(2^{-n}) \Lambda^{-\frac{1}{q}}(2^{-n}) 2^{\frac{1}{q}(\beta-\alpha,n)}.$$

Теорема 3.2.3. *Пусть даны простое число $l = s+1$, числа $1 < q \le 2$, $1 \le \theta < \infty$, $0 < \alpha_1 = ... = \alpha_\nu < \alpha_{\nu+1} \le ... \le \alpha_s$ $(1 \le \nu \le s)$ и $\Lambda(t)$ - неубывающая функция по каждой переменной, удовлетворяющая условиям $(S^{\boldsymbol{\alpha}})$ при $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, ..., \alpha_s)$ и $(S_{\boldsymbol{\beta}})$ при $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, ..., \beta_s)$, $\beta_i \ge 1$. Пусть $\Omega(t)$ - функция типа смешанного модуля гладкости порядка k. Тогда для всякого $R > C^{\alpha_1}(l)$ существуют простое число p, $p \equiv 1(mod\ l)$, $p \ll lnR$ и целое число $a, (a,p)=1$, $a^{\frac{p-1}{l}} \not\equiv 1(mod\, p)$ для отыскания которых достаточно выполнить $<< lnR \cdot lnlnlnR$ элементарных арифметических операций, такие, что*

$$\sup_{f \in SB_{q,\theta}^{\Omega}} \left| \int\limits_{[0,1]^s} f(x)dx - \tfrac{1}{p} \sum_{n=1}^{p} f\left(\left\{ \tfrac{n}{p} a_1 \right\}, ..., \left\{ \tfrac{n}{p} a_s \right\} \right) \right| \ll$$
$$\ll \tfrac{1}{R^{\frac{1}{q}}} \left\{ \sum_{n \in \Gamma^{\perp}(\Lambda,R)} \left[\Omega(2^{-n}) \Lambda^{-\frac{1}{q}}(2^{-n}) 2^{\frac{1}{q}(\beta-\alpha,n)} \right]^{\theta_0} \right\}^{\frac{1}{\theta_0}},$$

где $\theta_0 = \frac{\theta}{\theta-1}$ при $\theta > 1$ и $\theta_0 = \infty$ при $\theta = 1$.

В диссертации также приведен критерий равномерной распределенности сеток Коробова в терминах алгебраического многочлена Бернулли:

Теорема 3.4.1. *При данных $r > 1$ и s $(s = 1,2,...)$ существуют положительные величины C_1, C_2, β_1 , и β_2 такие, что для всякого целого положительного p и для всякого целочисленного вектора $(a_1, ..., a_s)$*
неравенство

$$D_s \left[\left(\left\{ \frac{k}{p} a_1 \right\}, ..., \left\{ \frac{k}{p} a_s \right\} \right)_{k=1}^{p} \right] \le C_1(s) \frac{(lnp)^{\beta_1(s)}}{p},$$

выполнено тогда и только тогда, когда

$$\left| \frac{1}{p} \sum_{k=1}^{p} b_r \left(\left\{ \frac{k}{p} a_1 \right\}, ..., \left\{ \frac{k}{p} a_s \right\} \right) - 1 \right| \le C_2(r,s) \frac{(lnp)^{\beta_2(r,s)}}{p^r},$$

где

$$b_r(x) = \sum_{(m_1,...,m_s) \in Z^s} (\overline{m_1} ... \overline{m_s})^{-r} e^{2\pi i (m_1 x_1 + ... + m_s x_s)}.$$

В данной работе под равномерной распределенностью последовательности сеток (конечных множеств) $\left\{ \xi_k^{(p)} \right\}_{k=1}^{p}$ из s-мерного единичного куба $[0,1]^s$, индексированных достаточно плотной возрастающей последовательностью целых положительных p понимается существование положительных $c(s) > 0$ и $\beta(s) > 0$ таких, что для всех p выполнено неравенство

$$D_s\left(\left\{\xi_k^{(p)}\right\}_{k=1}^{p}\right)=\sup\left\{\left|\frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p}\chi_I\left(\xi_k^{(p)}\right)-\prod_{j=1}^{s}\left(d_j-b_j\right)\right|:\right.$$
$$\left.I=\prod_{j=1}^{s}\left[b_j,d_j\right]\subset[0,1]^s\right\}\leq c(s)p^{-1}(lnp)^{\beta(s)},$$

где χ_A - характеристическая функция множества A.

Публикации по теме диссертации

Статьи в ведущих рецензируемых научных журналах, включенных в список ВАК

1. Сихов, М.Б. О некоторых теоремах вложения [Текст]/ М.Б. Сихов //Изв. Вузов. Математика. - 1988. - № 9. - С.83-85. - 0,19 п.л.

2. Сихов, М.Б. О вложении $E_p(\lambda)\subset H_c^{\omega_k}$ [Текст]/ М.Б. Сихов // Изв. Вузов. Математика. - 1990. - № 7. - С.61-65. - 0,31 п.л.

3. Сихов, М.Б. Неравенства типа Бернштейна, Джексона - Никольского и их приложения [Текст]/ М.Б. Сихов //Изв. Вузов. Математика. - 2002. - № 8. - С.57-64. - 0,5 п.л.

4. Сихов, М.Б. О прямых и обратных теоремах теории приближений с заданной мажорантой [Текст]/ М.Б. Сихов //Analysis Mathematica. - 2004. - V.30. - № 2. - С.137-146. - 0,63 п.л.

5. Сихов, М.Б. Неравенства типа Бернштейна, Джексона - Никольского и оценки норм производных ядер Дирихле [Текст]/ М.Б. Сихов //Матем. заметки. - 2006. - Т.80. - № 1. - С.95-104. - 0,63 п.л.

6. Сихов, М.Б. О вложении и аппроксимативных свойствах классов функций с доминирующей смешанной разностью [Текст]/ М.Б. Сихов // Изв. Вузов. Математика. - 2009. - № 8. - С.83-86.- 0,25 п.л.

7. Сихов, М.Б. Об алгоритме построения равномерно распределенных сеток Коробова [Текст]/ М.Б. Сихов, Н. Темиргалиев // Матем. заметки. - 2010. - Т.87. - № 6. - С. 948-950. - 0,19 п.л.

Публикации в других изданиях

8. Сихов, М.Б. О некоторых соотношениях между модулем непрерывности в L^p и наилучшим приближением в C [Текст]/ М.Б. Сихов //Изв. АН КазССР. Сер. физико - математическая. - 1986. - № 3. - С.41-46. - 0,38 п.л.

9. Сихов, М.Б. О вложении некоторых классов функций. [Текст]/ М.Б. Сихов //Каз. гос. Ун-т. Алматы, ДЕП. в КАЗНИИНТИ. - 12.01.87. - 20 с., № 1519 - Ка87. - 1,25 п.л.

10. Сихов, М.Б. Об одной теореме вложения [Текст]/ М.Б. Сихов.- В сб. "Дифференциальные уравнения, гармонический анализ и их приложения". - Москва: Изд-во МГУ. - 1987. - С.106-107. - 0,13 п.л.

11. Сихов, М.Б. О вложении некоторых классов функций [Текст]/ М.Б. Сихов //Изв. АН КазССР. Сер. физико - математическая. - 1988. - № 1. - С.45-47. - 0,19 п.л.

12. Сихов, М.Б. Об одной обратной теореме разных метрик для преобразованных

рядов Фурье [Текст]/ М.Б. Сихов .- В сб. "Теория функций, уравнения математической физики и их приложения". - Алматы. - 1988. - С.47-50. - 0,25 п.л.

13. Сихов, М.Б. Об обратных теоремах теории приближений [Текст]/ М.Б. Сихов. - Тез.докл. Всес. конф. Баку, 1989. - С. 117. - 0,06 п.л.

14. Сихов, М.Б. Об обратной теореме теории приближений в симметричных пространствах [Текст]/ М.Б. Сихов // Изв. АН КазССР. Сер. физико - математическая. - 1989. - № 5. - С.46-50. - 0,31 п.л.

15. Сихов, М.Б. О вложении $SB^{\omega}_{q,\theta} \subset E^{\lambda}_{q}(R^n)$ [Текст]/ М.Б. Сихов. - Тезисы докладов конф., посвященной 70-летию Аманова Т.И. "Применение методов теории функций и функционального анализа к задачам математической физики". Алматы ,1993. - С.141-142. - 0,13 п.л.

16. Сихов, М.Б. Об обратных теоремах теории приближений [Текст]/ М.Б. Сихов. - Тез.докл. региональной научно-методической конф. "Проблемы математики и информатики и их преподавания". Акмола, 1998. - С. 41. - 0,06 п.л.

17. Сихов, М.Б. Об эффективности алгоритмов численного интегрирования для классов функций с заданной мажорантой смешанных модулей гладкости [Текст]/ М.Б. Сихов. - Тез.докл. II межд. науч. конф. Актобе, 1999. - С. 95. - 0,06 п.л.

18. Сихов, М.Б. Об обратной теореме теории приближений в пространствах Лоренца [Текст]/ М.Б. Сихов.- Тез.докл. II межд. науч. конф. Актобе, 1999. - С. 125. - 0,06 п.л.

19. Сихов, М.Б. Об эффективности алгоритмов численного интегрирования на классах H^{Ω}_{q} [Текст]/ М.Б. Сихов. - Тез.докл. II межд. науч. конф. Актобе, 1999. - С. 127. - 0,06 п.л.

20. Сихов, М.Б. О прямых и обратных теоремах теории приближений [Текст]/ М.Б. Сихов. - Тез.докл. II межд. науч. конф. Актобе, 1999. - С. 126. - 0,06 п.л.

21. Кныкова,А.У. Оценка сверху погрешности квадратурных формул на классах W_s. [Текст]/ А.У. Кныкова, М.Б. Сихов, С.С. Кудайбергенов. - Тез.докл. II межд. науч. конф. Актобе, 1999. - С. 121. - 0,06 п.л.

22. Сихов, М.Б. Обратная теорема конструктивной теории функций в пространствах $L_{p,q}$ [Текст]/ М.Б. Сихов, А.У. Кныкова, К.А. Абетаева. - Труды Международного симпозиума посвященной 100-летию К.И.Сатпаева. Алматы, 1999. - Часть III. - С. 89-92. - 0,25 п.л.

23. Сихов, М.Б. Многомерная теорема Джексона в случае разных метрик [Текст]/ М.Б. Сихов. - Тез.докл. конф. "Современное состояние и перспективы развития математики в рамках программы "Казахстан в третьем тысячелетии". Алматы, 2000. - С. 99-101. - 0,19 п.л.

24. Сихов, М.Б. Неравенства типа Бернштейна, Джексона-Никольского и некоторые теоремы вложения [Текст]/ М.Б. Сихов // Доклады НАН РК. - 2000. - № 5. - С.14-19. - 0,38 п.л.

25. Сихов, М.Б. Оценки сверху погрешности квадратурных формул на классах функций с доминирующей смешанной разностью [Текст]/ М.Б. Сихов // Вестник КазГУ. Серия математика, механика, информатика. - 2001. - № 1(24). - С.28-34. - 0,44 п.л.

26. Сихов, М.Б. Многомерная теорема Джексона в случае разных метрик [Текст]/ М.Б. Сихов. - Труды межд. конф. "Современное состояние и перспективы развития математики в рамках программы "Казахстан в третьем тысячелетии". Алматы, 2001. - С.115-118. - 0,25 п.л.

27. Сихов, М.Б. О необходимых условиях вложения $E_{\phi,q}(\lambda)$ в $H^{\omega_k}_{\psi,p}$ [Текст]/ М.Б. Сихов // Изв. МОН РК, НАН РК. Сер. физико - математическая. - 2001. - № 1. - С.66-72. - 0,44 п.л.

28. Сихов, М.Б. Об оценке наилучших приближений и модулей гладкости (D, α) - производных функции [Текст]/ М.Б. Сихов //Вестник МО и НАН РК. - 2000. - № 5. - С. 73- 77. - 0,31 п.л.

29. Сихов, М.Б. О неравенствах Джексона-Никольского [Текст]/ М.Б. Сихов // Вестник КазНУ. Серия математика, механика, информатика. - 2002. - № 2(30). - С.9-17. - 0,56 п.л.

30. Сихов, М.Б. О прямых и обратных теоремах теории приближений с заданной мажорантой [Текст]/ М.Б. Сихов, О.Д. Дюсебаева //Изв. МОН РК, НАН РК. Сер. физико - математическая. - 2002. - № 1.- С.51-58. - 0,5 п.л.

31. Сихов, М.Б. Прямые и обратные теоремы теории приближений в разных функциональных метриках [Текст]/ М.Б. Сихов. - Тез.докл.межд.науч.конф. "Современные проблемы математики". Астана, 2002. - С. 115. - 0,06 п.л.

32. Сихов, М.Б. Обобщенное D- дифференцирование и неравенства типа Бернштейна -Никольского [Текст]/ М.Б. Сихов. - Тез.докл.межд.науч.конф. "Современные проблемы математики". Астана, 2002. - С. 118. - 0,06 п.л.

33. Сихов, М.Б. О вложении пространств Бесова со смешанным модулем гладкости [Текст]/ М.Б. Сихов //Вестник КазНУ. Серия математика, механика, информатика. - 2002. - № 5(33). - С.4-11. - 0,5 п.л.

34. Сихов, М.Б. Приближение функций многих переменных с заданной мажорантой в пространстве Бесова [Текст]/ М.Б. Сихов //Математический журнал. - 2002. - Т.2. - № 2. - С.95-100. - 0,38 п.л.

35. Сихов, М.Б. Об эффективности алгоритмов численного интегрирования для классов Бесова [Текст]/ М.Б. Сихов //Математический журнал. - 2002. - Т.2. - № 3. - С.82-88. - 0,44 п.л.

36. Сихов, М.Б. Об оценках (D, α) - производных многомерного ядра Дирихле [Текст]/ М.Б. Сихов //Математический журнал. - 2002. - Т.2. - № 4. - С.74-78. - 0,31 п.л.

37. Сихов, М.Б. Порядковые оценки (D, α) - производных ядер Дирихле в $L^p[-\pi, -\pi]^s)$ [Текст]/ М.Б. Сихов. - Тез. III межд. науч. конф. Актобе, 2003. - С. 120-121. - 0,13 п.л.

38. Сихов, М.Б. Об оценках норм производных ядра Дирихле с гармониками [Текст]/ М.Б. Сихов //Известия НАН РК. Сер.физико-математическая. - 2003. - № 1. - С.57-62. - 0,38 п.л.

39. Сихов, М.Б. О структурных и конструктивных характеристиках пространств Бесова со смешанным модулем гладкости [Текст]/ М.Б. Сихов. - Сб. докл. межд. научно-практической конф. "Теория функций, функциональный анализ и их приложения", посвященная 80-летию чл.-корр. АН КазССР, доктору физ.-мат. наук, проф. Аманова Т.И. Семипалатинск, 2003. - С. 99-100. - 0,13 п.л.

40. Сихов, М.Б. О наилучших приближениях функций тригонометрическими полиномами с произвольным спектром и смежные задачи [Текст]/ М.Б. Сихов. - Сб. докл. межд. научно-практической конф. "Теория функций, функциональный анализ и их приложения", посвященная 80-летию чл.-корр. АН КазССР, доктору физ.-мат. наук, проф. Аманова Т.И. Семипалатинск, 2003. - С.71. - 0,06 п.л.

41. Сихов, М.Б. Численное интегрирование функций из анизотропного класса $SB_{q,\theta}^{r_1,\dots,r_s}$ [Текст]/ М.Б. Сихов //Вестник КазНУ. Серия математика, механика, информатика, 2003. - № 1(33). - С.4-9. - 0,38 п.л.

42. Сихов, М.Б. О некоторых задачах многомерной теории приближений разных метрик [Текст]/ М.Б. Сихов. - Тез. докл. 10-й Межвузовской конф. по математике и механике. Алматы, 2004. - С. 238. - 0,06 п.л.

43. Сихов, М.Б. О точности прямых теорем теории приближений в S - пространствах

Бесова [Текст]/ М.Б. Сихов. - Тез. докл. межд.научной конф. "Актуальные проблемы дифференциальных уравнений и математической физики", посвященная 70-летнему юбилею академика НАН РК, доктора физ.-мат. наук, проф. Касымова К.А. Алматы, 2005. - С. 175. - 0,06 п.л.

44. Сихов, М.Б. Новые задачи об аппроксимативных возможностях полиномов по ортогональным системам с произвольным спектром [Текст]/ М.Б. Сихов, Н. Темиргалиев. - Тез. докл. межд.научной конф. "Современные проблемы дифференциальных уравнений,теории операторов и космических технологий". Алматы, 20-22 сентября 2006 г. - 0,06 п.л.

45. Сихов, М.Б. Об аппроксимативных возможностях полиномов по ортогональным системам с произвольным спектром [Текст]/ М.Б. Сихов, Н. Темиргалиев. - Материалы межд. конф. "Теория функций и вычислительные методы". Астана, 5-9 июня 2007 г. - С. 190-192.- 0,19 п.л.

46. Сихов, М.Б. Об аппроксимативных возможностях полиномов по ортогональным системам с произвольным спектром [Текст]/ М.Б. Сихов, Н. Темиргалиев. - Материалы 3-конгресса математиков тюркоязычных стран, Алматы, 30 июнь-4 июль, 2009. - С. 140. - 0,06 п.л.